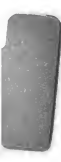
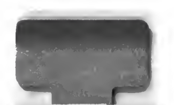
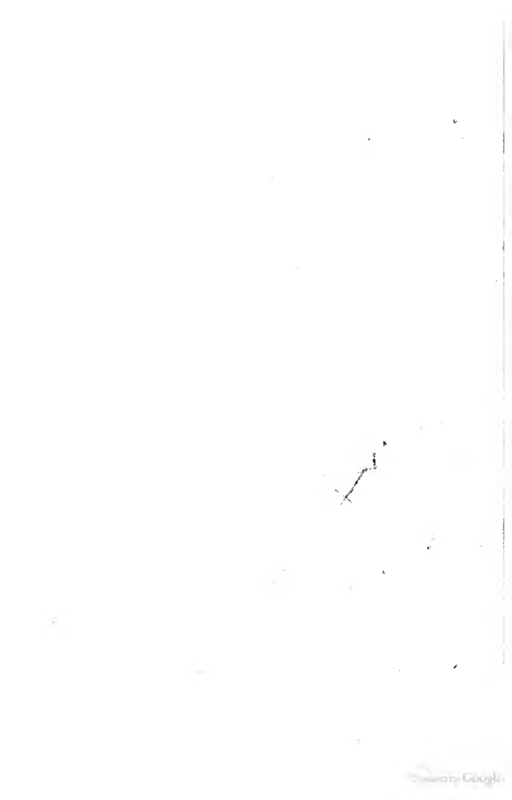



BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EMANUELE
201
38 C
37







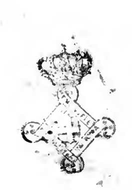
DIE

DETERMINANTEN

ELEMENTAR BEHANDELT

VON

DR. OTTO HESSE,
ORDENTL. PROFESSOR AN DEM K. POLYTECHNICUM ZU MÜNCHEN.









ZWEITE AUFLAGE.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1872.

Vorrede.

Unseren sechs Bayerischen Real-Gymnasien ist durch hohe Ministerial-Verfügung vom 5. October 1870 die Aufnahme der Lehre von den Determinanten in den Kreis der Unterrichts-Gegenstände vorgeschrieben worden.

Wenn auch der begabte Lehrer aus den wissenschaftlichen Arbeiten über Determinanten diejenigen Lehrsätze leicht herausfinden wird, welche sich für einen beschränkten Unterricht eignen, so tritt nach Zusammenstellung des Materials an ihn doch die schwierigere Aufgabe heran, dasselbe zu einem einheitlichen Ganzen zu verschmelzen und die einzelnen Theile in eine organische Verbindung zu bringen.

Dieser Arbeit habe ich mich um so lieber unterzogen, als ich glaube, allen jüngeren Mathematikern damit einen Dienst zu erweisen, welche in gefälliger Weise in die so fruchtbare Theorie der Determinanten eingeführt sein wollen.

München, den 4. Januar 1871.

Vorrede zur neuen Auflage.

Man hat die Frage aufgeworfen, ob der Beweis des Multiplications-Theoremes der Determinanten elementar genug sei, um hier eine Stelle zu finden. Da derselbe nur die Kenntniss der einfachsten Regeln der Algebra voraussetzt, so kann er wohl als elementar gelten, obwohl er studirt sein will. Ein zweiter, vielleicht verständlichere Beweis ist in Rücksicht auf den gemachten Einwurf nachgetragen worden. Es ist jedoch der so genial erdachte Beweis von Jacobi keinesweges zu umgehen, weil er die Richtung der Zeit kennzeichnet, welche dem befruchtenden Gedanken den Vorzug giebt vor der einseitigen Rechnung.

München, im Juni 1872.

O. Hesse.

Lineare Gleichungen.

Bis gegen den Anfang dieses Jahrhunderts kannte man noch keine andere allgemeine Auflösungs-Methode linearer Gleichungen als die, welche lehrt durch Elimination einer von den Unbekannten die Gleichungen zurückzuführen auf andere ebenfalls lineare Gleichungen, welche die eine Unbekannte nicht mehr enthalten.

Setzt man dieses Eliminations-Verfahren fort, so sieht man, dass man schliesslich auf eine Gleichung kommen muss mit einer Unbekannten x von der Form $ax=b$, woraus sich dann der Werth der Unbekannten $x = \frac{b}{a}$ ergiebt.

Es ist daraus ersichtlich, dass die Werthe der Unbekannten, welche einem Systeme linearer Gleichungen genügen, sich als Brüche darstellen, deren Zähler und Nenner zusammengesetzt sind aus denjenigen Grössen, welche in den gegebenen Gleichungen als gegebene betrachtet werden. Die Art der Zusammensetzung erfährt man erst nach der wirklichen Durchführung der vorgeschriebenen, in der That sehr unerquicklichen Rechnungs-Operationen.

Eine andere Unvollkommenheit der Methode wird man darin erblicken, dass sie uns zumuthet, mit ganz überflüssigen Factoren zu rechnen und dadurch die Rechnung um so schwerfälliger zu machen, je grösser die Zahl der Gleichungen ist. Ein Beispiel soll dieses anschaulich machen.

Man nehme drei lineare Gleichungen mit eben so vielen Unbekannten. Man berechne den Werth einer der Unbekannten nach der vorgeschriebenen Methode. Er stellt sich dar als ein Bruch, dessen Zähler sowohl als Nenner von der vierten Dimension ist, in Rücksicht auf die in den Gleichungen als gegeben vorausgesetzten Grössen. Es tritt aber ein Factor auf des ersten Grades im Zähler und im Nenner, der sich forthebt, so dass schliesslich der Werth der Unbekannten sich darstellt als ein Bruch in Rücksicht auf

die in den Gleichungen gegebenen Grössen von der dritten Dimension im Zähler, wie im Nenner. Es ist klar, dass die Methode uns einen überflüssigen Factor des ersten Grades aufgezwungen hat, und es drängt sich die Frage auf, ob der überflüssige Factor bei der Auflösung dreier Gleichungen mit drei Unbekannten sich nicht vermeiden lasse?

Wenn man hier schon den später zu beweisenden Satz voraussetzt, dass der Werth einer jeden Unbekannten aus einem Systeme von n linearen Gleichungen mit der gleichen Zahl der Unbekannten sich als ein Bruch darstellt, dessen Zähler sowohl als dessen Nenner von der n^{ten} Dimension ist in Rücksicht auf die in den Gleichungen als bekannt vorausgesetzten Grössen, so kann man leicht die Dimensionen der überflüssigen Factoren feststellen. Man wird dann finden, wenn n über 3 hinaus wächst, dass die Dimensionen der überflüssigen Factoren um sehr viel grösser werden, als die Zahl n.

Das Bestreben, die lästigen überflüssigen Factoren bei der Auflösung linearer Gleichungen zu vermeiden, musste auf die Determinanten führen, das sind aus den gegebenen Grössen zusammengesetzte, einfachste Ausdrücke für Zähler und Nenner derjenigen Brüche, welche die Werthe der Unbekannten in linearen Gleichungen darstellen. Diese Ausdrücke werden den Gegenstand des dritten Abschnittes der gegenwärtigen Schrift bilden.

Eine dritte Unvollkommenheit der Methode ist ihre Unsymmetrie. In welcher Reihenfolge wir die Unbekannten eliminiren, um zu der einen Gleichung mit einer Unbekannten zu gelangen, ist zwar für das Resultat gleichgiltig; aber, indem wir eine bestimmte Reihenfolge festsetzen, bevorzugen wir eine Unbekannte vor der anderen, während in den gegebenen linearen Gleichungen doch keine Unbekannte einen Vorzug vor der anderen hat. Man sehnt sich daher nach einer Methode, welche lehrt, alle Unbekannten mit einem Male zu eliminiren, ausgenommen die Unbekannte, deren Werth man bestimmen will. Dieses leistet die Methode der unbestimmten Factoren (ich glaube, von Lagrange im gegenwärtigen Jahrhundert), wenn sie auch von den übrigen hervorgehobenen Gebrechen nicht frei ist.

Die Methode der unbestimmten Factoren bei der Auflösung linearer Gleichungen besteht darin, dass man jede Gleichung mit einem unbestimmten Factor multiplicirt und sämmtliche Gleichungen addirt. Die genannten Factoren bestimmt man nun nachträglich so, dass sämmtliche Factoren der Unbekannten in der Summe der Gleichungen verschwinden mit Ausnahme des Factors, der mit derjenigen Unbekannten multiplicirt ist, deren Werth man bestimmen will. Diese symmetrische Eliminations-Methode lässt viel leichter die Form des Resultates erkennen, aus der sich dann Sätze über lineare Gleichungen ergeben, welche zugleich mit der Methode vorzuführen zunächst unsere Aufgabe sein wird.

Auf folgende Form lassen sich alle linearen Gleichungen zurückführen, und dieses soll die Form der Gleichungen sein, von der wir ausgehen:

$$1) \ldots\ldots \quad \begin{array}{l} x^0 = a_0^0 x_0 + a_1^0 x_1 + \ldots a_n^0 x_n \\ x^1 = a_0^1 x_0 + a_1^1 x_1 + \ldots a_n^1 x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n = a_0^n x_0 + a_1^n x_1 + \ldots a_n^n x_n. \end{array}$$

In diesen $(n+1)$ Gleichungen bedeuten $x_0, x_1, \ldots x_n$ die $(n+1)$ Unbekannten. Die $(n+1)^2$ Coefficienten a_k^λ der Unbekannten und die $(n+1)$ Grössen $x^0, x^1, \ldots x^n$ sollen beliebig gegebene Grössen sein.

Multiplicirt man die gegebenen Gleichungen der Reihe nach mit den Factoren $e_k^0, e_k^1, \ldots e_k^n$ und addirt sämmtliche Gleichungen, so erhält man:

$$2) \ldots\ldots \quad e_k^0 x^0 + e_k^1 x^1 + \ldots e_k^n x^n = x_k,$$

wenn man die genannten $(n+1)$ Factoren so bestimmt, dass sie folgenden Gleichungen genügen:

$$3) \ldots\ldots \quad \begin{array}{l} 0 = a_0^0 e_k^0 + a_0^1 e_k^1 + \ldots a_0^n e_k^n \\ 0 = a_1^0 e_k^0 + a_1^1 e_k^1 + \ldots a_1^n e_k^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1 = a_k^0 e_k^0 + a_k^1 e_k^1 + \ldots a_k^n e_k^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = a_n^0 e_k^0 + a_n^1 e_k^1 + \ldots a_n^n e_k^n \end{array}$$

Da dieses wieder $(n + 1)$ lineare Gleichungen sind zwischen den $(n + 1)$ zu bestimmenden Factoren, so werden sich dieselben wirklich bestimmen lassen und man hat, ihre Werthbestimmung vorausgesetzt, in 2) den Werth der einen Unbekannten x_k aus dem Systeme Gleichungen 1). Man wird sich nun fragen, was man hierdurch gewonnen habe?

Es handelte sich um die Auflösung der Gleichungen 1), das will sagen um die Werthbestimmung aller Unbekannten. Die Werthbestimmung einer einzigen Unbekannten ist in dem Vorhergehenden zurückgeführt worden auf ganz andere lineare Gleichungen zwischen den zu bestimmenden Factoren. Die Auflösung der linearen Gleichungen 1) nach den $(n + 1)$ Unbekannten verlangt hiernach die Auflösungen nicht eines Systemes Gleichungen, sondern von $(n + 1)$ Systemen von derselben Form, und jedes System enthält $(n + 1)$ andere Unbekannte.

Wenn nun die Auflösung der Systeme Gleichungen von der Form 3) grössere Schwierigkeit machte, als die Auflösung des einzigen Systems 1), so hätten wir allerdings die leichtere Aufgabe zurückgeführt auf eine schwerere; aber umgekehrt sehen wir auch ein, dass die schwerere Aufgabe der Auflösungen von Systemen von Gleichungen unter den obwaltenden Umständen sich zurückführen lässt auf ein einziges System Gleichungen, was doch als ein Nutzen erscheint, den wir aus unserer Untersuchung gezogen haben. In der That haben wir aber das System Gleichungen 1) mit $(n + 1)$ Unbekannten auf ein System von nur n Unbekannten zurückgeführt. Denn dividiren wir sämmtliche Gleichungen 3) mit Ausnahme der $(k + 1)^{ten}$ Gleichung durch e_k^0 und substituiren $\frac{e_k^1}{e_k^0} = E_k^1, \ldots \frac{e_k^n}{e_k^0} = E_k^n$, so sind diese n lineare Gleichungen mit der gleichen Zahl von Unbekannten $E_k^1, \ldots E_k^n$. Hat man nun die Werthe der letzteren bestimmt und setzt für $e_k^1, \ldots e_k^n$ ihre Werthe gleich $E_k^1 e_k^0, \ldots E_k^n e_k^0$ in die Gleichungen 3), so werden alle anderen erfüllt und die $(k + 1)^{te}$ Gleichung giebt den Werth der Unbekannten e_k^0, woraus dann die Werthe der anderen Unbekannten sich aus den Substitutionen unmittelbar ergeben.

Alle $(n+1)^2$ Gleichungen 3) lassen sich bequem durch folgende zwei Gleichungen ersetzen, wenn man annimmt, das k und λ irgend zwei ungleiche Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots n$ bedeuten:

$$4) \ldots\ldots\quad \begin{aligned} 0 &= a_\lambda^0 e_k^0 + a_\lambda^1 e_k^1 + \ldots a_\lambda^n e_k^n \\ 1 &= a_\lambda^0 e_\lambda^0 + a_\lambda^1 e_\lambda^1 + \ldots a_\lambda^n e_\lambda^n. \end{aligned}$$

Da in diese $(n+1)^2$ linearen Gleichungen mit der gleichen Zahl von Unbekannten e nur die $(n+1)^2$ gegebenen Coefficienten eingehen, so werden die Werthe der Unbekannten e ganz unabhängig sein von den in den Gleichungen 1) gegebenen Grössen $x^0, x^1, \ldots x^n$ und, ihre Werthbestimmung vorausgesetzt, entnehmen wir aus 2) folgende Auflösung des gegebenen Systemes 1):

$$5) \ldots\ldots\quad \begin{aligned} x_0 &= e_0^0 x^0 + e_0^1 x^1 + \ldots e_0^n x^n \\ x_1 &= e_1^0 x^0 + e_1^1 x^1 + \ldots e_1^n x^n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= e_n^0 x^0 + e_n^1 x^1 + \ldots e_n^n x^n. \end{aligned}$$

Diese Werthe der Unbekannten $x_0, x_1, \ldots x_n$ wieder in die Gleichungen 1) eingesetzt, müssen den Gleichungen genügen und zwar unabhängig davon, welche Werthe die bekannten Grössen $x^0, x^1, \ldots x^n$ auch haben. Setzt man daher die genannten Werthe ein in die $(\lambda+1)^{te}$ Gleichung 1):

$$x^\lambda = a_0^\lambda x_0 + a_1^\lambda x_1 + \ldots a_n^\lambda x_n,$$

so muss der Gleichung genügt werden unabhängig von den Werthen der gegebenen Grössen $x^0, x^1, \ldots x^n$. Das will sagen, dass die Coefficienten der genannten Grössen auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich sein müssen. Aus der Gleichsetzung der Coefficienten ergeben sich nun die Gleichungen:

$$6) \ldots\ldots\quad \begin{aligned} 0 &= a_0^\lambda e_0^k + a_1^\lambda e_1^k + \ldots a_n^\lambda e_n^k \\ 1 &= a_0^\lambda e_0^\lambda + a_1^\lambda e_1^\lambda + \ldots a_n^\lambda e_n^\lambda. \end{aligned}$$

Wir machen darauf aufmerksam, dass diese Gleichungen auch hervorgehen aus den Gleichungen 4), wenn man dort sämmtliche obere Indices der Grössen a und e mit ihren entsprechenden unteren Indices vertauscht.

Diese beiden Gleichungen 6) repräsentiren wieder $(n+1)^2$ lineare Gleichungen mit der gleichen Zahl von Unbekannten e. Sie bilden auch, wie die Gleichungen 4), $(n+1)$ Systeme Gleichungen mit $(n+1)$ Unbekannten, letztere nur anders geordnet.

Zum Zwecke der Auflösung der gegebenen Gleichungen 1) in 5) wird es ganz gleichgiltig sein, ob wir die $(n+1)^2$ Unbekannten e aus den Gleichungen 4) berechnen oder aus den Gleichungen 6). Es giebt uns aber diese Bemerkung Veranlassung, nach demjenigen Systeme linearer Gleichungen zu forschen, dessen Auflösung in gleicher Weise vermittelt wird durch die Gleichungen 6), als die Auflösung der Gleichungen 1) vermittelt wird durch die Gleichungen 4).

Da die Gleichungen 4) übergehen in die Gleichungen 6), wenn man sämmtliche obere Indices der Coefficienten a und der Unbekannten e mit ihren unteren vertauscht, so kann das fragliche System kein anderes sein, als folgendes:

$$7) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} u_0 &= a_0^0 u^0 + a_0^1 u^1 + \ldots a_0^n u^n \\ u_1 &= a_1^0 u^0 + a_1^1 u^1 + \ldots a_1^n u^n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n &= a_n^0 u^0 + a_n^1 u^1 + \ldots a_n^n u^n, \end{aligned}$$

wenn man in diesen Gleichungen $u^0, u^1, \ldots u^n$ als Unbekannte, alle übrigen Grössen als Bekannte betrachtet. Die Auflösungen werden folgende sein:

$$8) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} u^0 &= e_0^0 u_0 + e_1^0 u_1 + \ldots e_n^0 u_n \\ u^1 &= e_0^1 u_0 + e_1^1 u_1 + \ldots e_n^1 u_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u^n &= e_0^n u_0 + e_1^n u_1 + \ldots e_n^n u_n. \end{aligned}$$

Denn multiplicirt man die Gleichungen 7) der Reihe nach mit $e_0^\lambda, e_1^\lambda, \ldots e_n^\lambda$ und addirt, so erhält man auf Grund der Gleichungen 6) die $(\lambda+1)^{te}$ Gleichung 8).

Obwohl wir die vorgelegten Systeme linearer Gleichungen 1) und 7) in der That nicht aufgelöst haben, so können wir nach dem Vorhergehenden doch den Satz aussprechen:

9) **Wenn in zwei Systemen linearer Gleichungen die Horizontal-Reihen der Coefficienten a der Unbekannten des einen Systemes der Reihe nach gleich sind den Vertikal-Reihen der Coefficienten des anderen Systemes, so sind in der Auflösung des einen Systemes die Horizontal-Reihen der Coefficienten e der Reihe nach gleich den Vertikal-Reihen der Coefficienten in der Auflösung des anderen Systemes.**

Die Horizontal-Reihen der Coefficienten a in dem gegebenen Systeme Gleichungen 1) werden den entsprechenden Vertikal-Reihen in 7) gleich, wenn man annimmt, dass für alle Werthe von k und λ ist $a_k^\lambda = a_\lambda^k$. Setzt man ferner $x^k = u_k$, was erlaubt ist, da alle diese $(2n+2)$ gegebenen Grössen irgend welche Werthe haben können, so unterscheiden sich die beiden Systeme Gleichungen 1) und 7) von einander nur in der Bezeichnung der Unbekannten. Da unter diesen Umständen die Auflösungen der beiden Systeme Gleichungen 1) und 7) zu gleichen Resultaten führen müssen, unbekümmert welche Werthe auch die als bekannt vorausgesetzten Grössen $x^k = u_k$ haben, so ergiebt sich aus dem Vergleich der Resultate 5) und 8), dass man hat $e_k^\lambda = e_\lambda^k$.

Die Richtigkeit dieser Gleichungen $e_k^\lambda = e_\lambda^k$, unter der Voraussetzung, dass $a_k^\lambda = a_\lambda^k$, lässt sich einfacher noch aus der Aequivalenz der beiden Systeme Gleichungen 4) und 6) nachweisen. Aber auch diese in dem Vorhergehenden nachgewiesene Aequivalenz braucht man nicht vorauszusetzen, denn sie lässt sich auch ohne die Vermittelung der Systeme 1) und 7) direkt aus einem jener Systeme 4) oder 6) nachweisen.

Den bewiesenen Satz: $e_k^\lambda = e_\lambda^k$ unter der Voraussetzung, dass $a_k^\lambda = a_\lambda^k$, kann man in Worten kurz so aussprechen:

10) **Wenn in einem Systeme linearer Gleichungen die Horizontal-Reihen der Coefficenten der Unbekannten gleich sind den entsprechenden Vertikal-Reihen der Coefficienten in demselben Systeme, so trifft dasselbe auch zu in der Auflösung des Systemes.**

Die hervorgehobenen Sätze werden sich durch Ausrechnung auch noch beweisen lassen, wenn $n = 1$ oder $= 2$

oder = 3 ist, darüber hinaus wohl nicht. Es liegt darum in diesen Sätzen eine gewisse Poesie der Wissenschaft, dass sie in logischer Schlussfolge voraussagt gewisse Eigenschaften der linearen Gleichungen im Allgemeinen, die man durch direkte Rechnung nimmer beweisen kann.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass die Substitutionen 1) und 8) auf Grund der Gleichungen 4) folgende Gleichung zu einer identischen machen:

11) . . $x^0u^0 + x^1u^1 + \dots x^nu^n = x_0u_0 + x_1u_1 + \dots x_nu_n.$

Diese Gleichung wird durch die Substitutionen 5) und 7) auf Grund des dem Systeme 4) äquivalenten Systemes 6) wieder zu einer identischen Gleichung. Es concentrirt mithin die identische Gleichung 11) gewissermassen das System Gleichungen 4) und das mit ihm äquivalente System 6). Man kann darum die identische Gleichung 11) als Ausgangspunkt der Untersuchung nehmen und aus ihr alles dasjenige entwickeln, was in dem Vorhergehenden festgestellt worden ist; etwa wie folgt: Man gehe von den Substitutionen 1) und 8) aus, wodurch an Stelle der Variabelen $x^0, x^1, \dots x^n$ und $u^0, u^1, \dots u^n$ die Variabelen $x_0, x_1, \dots x_n$ und $u_0, u_1, \dots u_n$ eingeführt werden. Die Coefficienten a und e in diesen Substitutionen sollen sonst ganz beliebige sein, sie sollen nur so beschaffen sein, dass die Substitutionen 1) und 8) die Gleichung 11) zu einer identischen Gleichung machen. In dieser Voraussetzung wird es sich darum handeln, darzulegen, dass aus den Substitutionen 1) und 8) die Substitutionen 5) und 7) folgen.

Die vorliegenden linearen Gleichungen 1) sind in dem Vorhergehenden in 5) nicht wirklich aufgelöst worden. Ihre Auflösung ist nur abhängig gemacht worden von der Auflösung anderer linearer Gleichungen 4) oder 6). Und in der That kann man allgemeine lineare Gleichungen von der Form 1) auch nicht auflösen mit Ausschliessung des Hülfsmittels der Determinanten, wenn man die in dem Vorhergehenden besprochenen überlästigen Factoren vermeiden will. Das Hülfsmittel der Determinanten lässt sich aber in speciellen Fällen ersetzen durch andere ingeniöse Betrachtungen, von welchen jetzt eine Probe gegeben werden soll.

Es handle sich um die Auflösung der linearen Gleichungen 1) in der Voraussetzung, dass sämmtliche obere Indices der Coefficienten a wirkliche Exponenten seien. In dieser Voraussetzung werden alle Coefficienten a in der ersten Gleichung gleich der Einheit. In der zweiten Gleichung werden sie beliebig gegebene Grössen sein, in der dritten Gleichung die Quadrate derselben und so ferner.

Multiplicirt man die Gleichungen 1) der Reihe nach mit den Factoren $e_k^0, e_k^1, \ldots e_k^n$ und addirt, so erhält man die Gleichung 2), wenn man die genannten Factoren so bestimmt, dass sie den Gleichungen 3) genügen. Nehmen wir nun vorläufig an, dass man diese Factoren bestimmt habe, so lehrt der Anblick der Gleichungen 3), dass $a_0, a_1, \ldots a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots a_n$ die Wurzeln sind der Gleichung n^{ten} Grades

$$0 = a^0 e_k^0 + a^1 e_k^1 + \ldots a^n e_k^n.$$

Der rechte Theil dieser Gleichung lässt sich, wie aus der Theorie der algebraischen Gleichungen bekannt ist, in Factoren zerlegen, so dass man identisch hat:

$$a^0 e_k^0 + a^1 e_k^1 + \ldots a^n e_k^n =$$
$$e_k^n (a-a_0) \ldots (a-a_{k-1})(a-a_{k+1}) \ldots (a-a_n).$$

Setzt man in dieser Gleichung a_k für a und bemerkt, dass auf Grund der $(k+1)^{ten}$ Gleichung 3) der linke Theil der Gleichung gleich der Einheit wird, so erhält man eine Gleichung, aus welcher der Factor e_k^n auf der rechten Seite der Gleichung sich bestimmen lässt. Setzt man seinen Werth in die Gleichung ein, so hat man die in Rücksicht auf a identische Gleichung:

$$12) \ldots \quad a^0 e_k^0 + a^1 e_k^1 + \ldots a^n e_k^n = \frac{(a-a_0) \ldots (a-a_{k-1})(a-a_{k+1}) \ldots (a-a_n)}{(a_k-a_0) \ldots (a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1}) \ldots (a_k-a_n)}.$$

Die Kenntniss der Factoren $e_k^0, e_k^1, \ldots e_k^n$ wurde in dem Vorhergehenden vorausgesetzt. Aus dieser identischen Gleichung 12) ergeben sie sich aber als Entwickelungs-Coefficienten. Denn entwickelt man den rechten Theil der Gleichung, der nur bekannte Grössen und die Variabele a enthält, nach Potenzen der letzteren, so zeigt es sich, dass

die Coefficienten der verschiedenen Potenzen gerade die zu bestimmenden Grössen e_k^0, e_k^1, ... e_k^n sind, weil zwei ganze Functionen einer Variabele nicht anders gleich sein können, als wenn die Coefficienten gleicher Potenzen der Variabele in beiden Functionen einander gleich sind.

Es bedarf also noch der Entwickelung des rechten Theiles der identischen Gleichung 12), um zunächst die Werthe der zu bestimmenden Grössen e_k^0, e_k^1, ... e_k^n und dann in 2) oder 5) den Werth der Unbekannten x_k aus den Gleichungen 1) darzustellen.

Es giebt aber einen Fall, in dem das Resultat sich ohne Entwickelung hinschreiben lässt. Wir haben den Fall im Auge, wenn sämmtliche obere Indices in den gegebenen Gleichungen 1) Exponenten bedeuten nicht allein für die Coefficienten, sondern auch für die gegebenen Grössen x^0, x^1, ... x^n, welche dann die Potenzen einer und derselben Grösse x darstellen. Diesen Fall festhaltend, geht der linke Theil der identischen Gleichung 12) über in den linken Theil der Gleichung 2), wenn wir für die variabele Grösse a setzen x. Wir haben demnach auf Grund der identischen Gleichung 12) für den letzteren Fall den Werth der Unbekannten x_k:

$$\frac{(x-a_0)\ldots(x-a_{k-1})(x-a_{k+1})\ldots(x-a_n)}{(a_k-a_0)\ldots(a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1})\ldots(a_k-a_n)} = x_k.$$

Für diesen Fall, in welchem sämmtliche obere Indices in den Gleichungen 1) Exponenten bedeuten, haben wir folgende Auflösungen dieser Gleichungen:

$$13) \ldots \quad \begin{aligned} x_0 &= \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\ldots(a_0-a_n)} \\ x_1 &= \frac{(x-a_0)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_n)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= \frac{(x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_0)(a_n-a_1)\ldots(a_n-a_{n-1})}. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich nun auf Grund von 12) und 2) die Werthe der Unbekannten in den Gleichungen 1), in welchen die oberen Indices nur der Coefficienten a wirkliche Exponenten bedeuten, wenn man die Ausdrücke 13) der Unbe-

kannten nach Potenzen der Grösse x wirklich entwickelt und nach der Entwickelung die Exponenten von x zu obere Indices macht. Diese Operation stillschweigend angenommen, sind die Gleichungen 13) symbolische Auflösungen der gegebenen Gleichungen 1) unter der Voraussetzung, dass die oberen Indices nur der Coefficienten a Exponenten bedeuten.

Unter der gleichen Voraussetzung braucht man nach dem Satze 9) die Gleichungen 7) nicht besonders aufzulösen, denn dieser Satz lehrt, wie aus den oben aufgestellten Auflösungen der Gleichungen 1) die Auflösungen der Gleichungen 7) gebildet werden können. Nichts desto weniger wollen wir die genannten Gleichungen 7) noch direkt auflösen.

Wenn wir annehmen, dass die Werthe der Unbekannten $u^0, u^1, \ldots u^n$ in den Gleichungen 7) schon gefunden seien, so lehrt der Anblick dieser Gleichungen 7), dass $u_0, u_1, \ldots u_n$ nichts anderes sind, als die $(n+1)$ Werthe, die die gegebene ganze Function des n^{ten} Grades:

$$x^0 u^0 + x^1 u^1 + \ldots x^n u^n$$

für die $(n+1)$ Werthe $a_0, a_1, \ldots a_n$ der Variabelen x annimmt. Die Algebra lehrt uns eine ganze Function des n^{ten} Grades zusammensetzen aus den $(n+1)$ Werthen, welche dieselbe für $(n+1)$ Werthe der Variabelen annimmt in folgender Formel:

$$14) \quad x^0 u^0 + x^1 u^1 + \ldots x^n u^n = u_0 \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\ldots(a_0-a_n)} + u_1 \frac{(x-a_0)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_n)} + \ldots + u_n \frac{(x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_0)(a_n-a_1)\ldots(a_n-a_{n-1})}.$$

Diese Gleichung concentrirt gewissermassen die Auflösungen der Gleichungen 7). Denn entwickeln wir den rechten Theil der Gleichung nach Potenzen der Variabele x und setzen die Coefficienten gleicher Potenzen auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich, so erhalten wir die wirklichen Auflösungen der Gleichungen 7).

Wir haben in dem Vorhergehenden die Auflösungen der Gleichungen 1) gegeben in der Voraussetzung, dass die oberen Indices der Coefficienten a Exponenten bedeuten, in 13), freilich in symbolischer Form. Unter derselben Voraussetzung haben wir auch die Gleichungen 7) symbolisch aufgelöst durch die identische Gleichung 14). Es verlohnt sich nun der Mühe, an diesen Auflösungen den Satz 9) zu verificiren, dessen Beweis wir dort ohne die Voraussetzung gegeben haben.

Die Aufgabe der Algebra, einen Bruch, dessen Zähler und dessen Nenner ganze Functionen einer Variabele sind, in Partialbrüche zu zerlegen, führt, wenn man die linearen Factoren des Nenners bestimmt hat, bei Feststellung der Zähler der Partialbrüche auch auf lineare Gleichungen zurück, die einer eleganten Behandlung fähig sind, welche die überflüssigen Factoren vermeidet. Man wird auch noch andere specielle lineare Gleichungen auffinden können, welche sich in ähnlicher Weise elegant behandeln lassen. Handelt es sich aber um die von den überflüssigen Factoren freien Auflösungen allgemeiner linearen Gleichungen, so kennt man bis zur Zeit kein anderes Hülfsmittel, als die Determinanten.

Alternirende Functionen.

Einen mathematischen Ausdruck von zwei oder mehreren Elementen nennt man eine symetrische Function der Elemente, wenn bei jeder beliebigen Vertauschung der Elemente der Ausdruck ungeändert bleibt. Die symmetrische Function ist eine ganze Function, wenn sie die Summe von Gliedern ist, welche die Elemente und ihre Potenzen nur als Factoren enthalten.

Eine ganze symmetrische Function der $(n+1)$ Elemente $a_0, a_1, \ldots a_n$ hat die Eigenschaft, dass ein Glied derselben in der Regel noch andere Glieder derselben Function bedingt. Findet sich unter den Gliedern der symmetrischen Function zum Beispiel das Glied ca_0, so muss dieselbe nach der Definition auch die Glieder enthalten $ca_1, ca_2, \ldots ca_n$. Wenn

man unter der einfachsten symmetrischen Function diejenige versteht, deren Glieder nur die erste Potenz eines der Elemente als Factor enthalten, so kann man allerdings sagen, dass ein Glied der einfachsten symmetrischen Function alle übrigen Glieder bedinge. Dieses trifft aber nicht mehr zu, wenn wir über die einfachste symmetrische Function hinaus gehen.

In der Theorie der algebraischen Gleichungen können die symmetrischen Functionen nicht entbehrt werden. Denn wenn man von den Anfängen absicht, so geht diese Theorie von zwei Grundsätzen aus, die allerdings vorerst bewiesen werden, 1), dass die Coefficienten in der Gleichung sich als ganze symmetrische Functionen der Wurzeln darstellen lassen und umgekehrt 2), dass jede ganze symmetrische Function der Wurzeln der Gleichung sich als eine ganze Function der Coefficienten ausdrücken lässt. Wir werden in dem Folgenden diese Sätze weder beweisen noch irgend auf sie zurückgreifen; sie sollen an dieser Stelle nur dienen, um an die Bedeutung der symmetrischen Functionen in der Algebra überhaupt zu erinnern und um an Bekanntes die Betrachtung einer anderen Art von Functionen, der alternirenden Functionen, anzuknüpfen, welche mit den symmetrischen Functionen eine grosse Aehnlichkeit haben.

Eine alternirende Function von zwei oder mehreren Elementen ist eine solche, welche ihrem absoluten Werthe nach sich nicht ändert bei beliebiger Vertauschung der Elemente, welche aber das entgegengesetzte Vorzeichen annimmt, wenn man irgend zwei Elemente mit einander vertauscht. Es sind zum Beispiel $(a_1 - a_0)$ und $(a_1 - a_0)\ (a_2 - a_0)\ (a_2 - a_1)$ Functionen der beschriebenen Art von zwei und drei Elementen. Auch im Folgenden sollen nur die ganzen alternirenden Functionen in Betracht kommen.

Die alternirende Function hat mit der symmetrischen Function die Eigenschaft gemein, dass ein Glied andere Glieder derselben Function bedingt. Irgend ein Glied der alternirenden Function der $(n+1)$ Elemente $a_0, a_1, \ldots a_n$ wird immer die Form haben:

$$c a_0^{\alpha_0}\ a_1^{\alpha_1}\ \ldots\ a_k^{\alpha_k}\ \ldots\ a_\lambda^{\alpha_\lambda}\ \ldots\ a_n^{\alpha_n},$$

wenn $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ irgend welche Exponenten bedeuten, die

ganze Zahlen sind, die 0 mit eingeschlossen. Dieses Glied bedingt nach der Definition der alternirenden Function ein anderes:

$$- c\, a_0^{\alpha_0}\, a_1^{\alpha_1} \, . \, . \, a_\lambda^{\alpha_k} \, . \, . \, a_k^{\alpha_\lambda} \, . \, . \, a_n^{\alpha_n},$$

welches abgesehen von dem Vorzeichen aus dem erst genannten Gliede hervorgeht, wenn man die Elemente a_k und a_λ mit einander vertauscht, und welches durch die Vertauschung derselben Elemente wieder in das erstgenannte Glied übergeht.

Die Summe der beiden Glieder hat den Factor:

$$(a_k^{\alpha_k}\, a_\lambda^{\alpha_\lambda} \;-\; a_\lambda^{\alpha_k}\, a_k^{\alpha_\lambda}).$$

Von den Exponenten α_k und α_λ muss nothwendiger Weise einer grösser sein, als der andere; denn wären sie gleich, so vernichteten sich die beiden Glieder und kämen in der alternirenden Function gar nicht vor. Setzen wir deshalb $\alpha_\lambda = \alpha_k + p$, so wird der hervorgehobene Factor:

$$a_k^{\alpha_k}\, a_\lambda^{\alpha_k}\, (a_\lambda^p \;-\; a_k^p).$$

Wie die Summenformel:

$$\frac{a_\lambda^p - a_k^p}{a_\lambda - a_k} = a_\lambda^{p-1} + a_\lambda^{p-2}\, a_k + \ldots a_k^{p-1}$$

der geometrischen Reihe lehrt, ist $a_\lambda^p - a_k^p$ theilbar ohne Rest durch $(a_\lambda - a_k)$. Es ist also $(a_\lambda - a_k)$ ein Factor der Summe der beiden hervorgehobenen Glieder der alternirenden Function. Da nun die Glieder der alternirenden Function sich paaren, wie die hervorgehobenen, so wird auch $(a_\lambda - a_k)$ ein Factor sein eines jeden Glieder-Paares, mithin auch ein Factor der alternirenden Function. Wir können darum den Satz aussprechen:

Eine jede ganze alternirende Function von irgend welchen Elementen hat die Differenz irgend zweier Elemente zum Factor.

Daraus folgt nun, dass eine jede ganze alternirende Function das Produkt aus den Differenzen je zweier Elemente als Factor haben muss. Es hat darum eine jede ganze alternirende Function A der $(n + 1)$ Elemente a folgendes Produkt P als Factor:

$$15) \ldots \quad \begin{array}{rl} P = (a_1 - a_0) & (a_2 - a_0) \ldots (a_n - a_0) \\ & (a_2 - a_1) \ldots (a_n - a_1) \\ & \quad \ldots\ldots \\ & \qquad\qquad (a_n - a_{n-1}), \end{array}$$

was wir ausdrücken können durch dio Gleichung:

$$A = S \,.\, P.$$

In dem Produkte P gehen, abgesehen von dem ersten Factor $(a_1 - a_0)$, die beiden ersten Horizontal-Reihen der Factoren in einander über, wenn man dio Elemente a_0 und a_1 mit einander vertauscht, während die übrigen Factoren sich gar nicht ändern. Da nun der erste Factor bei dieser Vertauschung nur sein Vorzeichen ändert, so sieht man, dass das Produkt P eine alternirende Function der Elemente a_0 und a_1 ist. Sie ist zugleich eine alternirende Function aller $(n+1)$ Elemente.

Man überzeugt sich von der Wahrheit dieser Behauptung leicht, wenn man die Factoren in P also ordnet:

$$\pm P = (a_k - a_\lambda)\ \Pi\ (a_{k'} - a_k)\ \Pi\ (a_{\lambda'} - a_\lambda)\ \Pi\ (a_{k'} - a_{\lambda'}),$$

woselbst angenommen ist, dass $\varkappa'$ und λ' die Zahlen $0, 1, \ldots n$ mit Ausnahme der Zahlen $\varkappa$ und λ und dass $\Pi\ (a_{k'} - a_k)$ das Produkt der Factoren $(a_{k'} - a_k)$ u. s. w. bedeuten. Denn durch die angegebene Vertauschung der Elemente a_k und a_λ mit einander ändert nur der erste Factor $(a_k - a_\lambda)$ sein Vorzeichen. Das zweite und dritte Produkt Π gehen in einander über, während das letzte Produkt Π ganz ungeändert bleibt.

Da nun das Produkt P selbst eine alternirende Fnnction der $(n+1)$ Elemente a ist, so beweist die oben aufgeführte Gleichung $A = S \,.\, P$, dass S eine symmetrische Function ist und dass das Produkt P die allereinfachste ganze alternirende Function der genannten Elemente ist. Wir drücken dieses nur anders aus, wenn wir sagen:

Eine jedo ganze alternirende Function von irgend welchen Elementen hat die einfachste alternirende Function derselben Elemente zum Factor.

Die einfachste alternirendo Function P, besonders in der entwickelten Form, wird den Gegonstand der folgenden Untersuchung bilden.

Die Zahl der Factoren in dem Produkte P ist, wenn wir von unten heraufrechnen, $1 + 2 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$. Ein jeder Factor ist ein Binomium. Das Produkt aus 2 Binomien entwickelt giebt 2^2 Glieder, das Produkt aus 3 Binomien giebt 2^3 Glieder. Unser Produkt P entwickelt wird demnach $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ Glieder enthalten, wenn nicht einige von ihnen gleich u d mit entgegengesetzten Vorzeichen sich fortheben. In dem Falle $n = 2$ wird man bemerken, dass zwei Glieder sich gegenseitig vernichten. In dem Falle $n = 3$ vernichten sich von den 64 angezeigten Gliedern 40, so dass nur 24 Glieder übrig bleiben.

Wir geben die Zahl der wirklichen Glieder in der Entwickelung unseres Produktes P zum Voraus an gleich $1 . 2 \ldots (n + 1)$, damit man erkenne, wie viel Glieder man in der Entwickelung des Produktes unnütz hinzuschreiben hat, wenn man dasselbe entwickelt einfach nach den bekannten Regeln der Multiplication von Binomien.

Im Falle $n = 4$ weiset das nach den allgemeinen Regeln der Multiplication von Binomien ausgeführte Produkt 1024 Glieder nach, welche sich aber gegenseitig so vernichten, dass nur 120 wirkliche Glieder übrig bleiben. Wir haben also in der direkten Ausrechnung des Produktes in dem angegebenen Falle 1024—120 überflüssige Glieder hingeschrieben. Im Angesichte dieser Thatsachen wird man sich wohl nach einer Methode sehnen, welche lehrt, die Glieder der Entwickelung des Produktes P hinzuschreiben, ohne die sich gegenseitig vernichtenden vielen Glieder in Rechnung zu ziehen. Eine solche Methode wird sich ergeben aus der Betrachtung des Produktes P als alternirende Function.

Ein erstes positives Glied der Entwickelung des Produktes P wird erhalten, wenn man in den Binomien, die die Factoren bilden, sämmtliche negative Glieder unterdrückt:

16) . . . . $+ a_0^0 a_1^1 \ldots a_n^n$.

Dieses erste Glied der alternirenden Function P bedingt ein zweites negatives Glied derselben Function, welches, abgesehen von dem Vorzeichen, aus diesem Gliede erhalten wird, wenn man irgend zwei Elemente oder, wie wir uns

künftig ausdrücken werden, zwei von den unteren Indices $0, 1, \ldots n$ der Elemente a mit einander vertauscht. Aus diesem zweiten negativen Gliede geht wieder ein drittes positives Glied hervor, wenn man wieder zwei untere Indices mit einander vertauscht und so ferner.

Man erkennt hieraus, dass das erste positive Glied 16) der alternirenden Function P, gleich wie bei der symmetrischen Function eine grosse Zahl anderer Glieder bedingt, welche, wenn man vorläufig absieht von ihren Vorzeichen, sämmtlich aus dem ersten positiven Gliede 16) erhalten werden durch Permutation der unteren Indices $0, 1, \ldots n$. Ihre Zahl wird einschliesslich des ersten Gliedes demnach gleich sein dem Produkte $1 . 2 \ldots (n+1) = \Pi\,(n+1)$.

Die Vorzeichen dieser $\Pi\,(n+1)$ Glieder bestimmen sich nachträglich aus dem ersten positiven Gliede, wenn man in Erwägung zieht, dass zwei Glieder der alternirenden Function entgegengesetzte Vorzeichen haben, wenn das eine Glied aus dem anderen durch Vertauschung zweier unteren Indices hervorgegangen ist.

Wir werden jetzt nachweisen, dass die Entwickelung der alternirenden Function P keine anderen Glieder enthalten kann, als die besprochenen $\Pi\,(n+1)$ Glieder, welche durch das erste positive Glied 16) bedingt sind.

Irgend ein anderes Glied der Entwickelung des Produktes P kann nur die Form haben:

$$\pm\, a_0^{\alpha_0}\, a_1^{\alpha_1} \,\ldots\, a_k^{\alpha_k} \,\ldots\, a_\lambda^{\alpha_\lambda} \,\ldots\, a_n^{\alpha_n}.$$

Von den Exponenten in diesem Gliede können nicht zwei einander gleich sein. Denn wären α_k und α_λ einander gleich, so würde das angegebene Glied sich aufheben gegen dasjenige Glied der alternirenden Function P mit dem entgegengesetzten Vorzeichen, welches aus dem angegebenen Gliede entsteht, wenn man die unteren Indices k und λ der Elemente a mit einander vertauscht. Da nun ein jedes Binomium in dem Produkte P einen Factor hergiebt zur Bildung des angegebenen Gliedes, so wird die Summe $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots \alpha_n = \frac{n\,(n+1)}{2}$ gleich der Zahl der Factoren des Produktes P sein. Man kennt aber keine ganzen ungleichen Zahlen für $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$,

deren Summe gleich $\frac{n(n+1)}{2}$ ist, ausgenommen die Zahlen $0, 1, \ldots n$. Es sind darum in dem angegebenen Gliede $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ diese Zahlen in irgend einer Reihenfolge. Ordnet man nun die Factoren in dem angegebenen Gliede nach der Grösse ihrer Exponenten, so sieht man, dass dieses Glied schon unter den $\Pi(n+1)$ Gliedern der alternirenden Function vorkommt. Wir können deshalb sagen, dass irgend ein Glied der einfachsten alternirenden Function von irgend welchen Elementen alle übrigen Glieder bedinge, gleich wie in der einfachsten symmetrischen Function.

Handelt es sich nun um die Entwickelung des Produktes P in 15), so wird man nicht etwa die Binomien der Factoren mit einander multipliciren und dadurch eine grosse Zahl von Gliedern in die Rechnung einführen, die sich schliesslich gegenseitig vernichten; man wird vielmehr von dem positiven Anfangs-Gliede 16) der Entwickelung des Produktes P ausgehen und durch Permutation der unteren Indices in dem Anfangs-Gliede sich alle $\Pi(n+1)$ Glieder der Entwickelung des Produktes P bilden, vorerst ohne Rücksicht auf die Vorzeichen der Glieder. Die Vorzeichen dieser $\Pi(n+1)$ Glieder bestimmen sich dann nachträglich im Anschlusse an das positive Anfangs-Glied 16), wenn man im Auge behält, dass je zwei Glieder entgegengesetzte Vorzeichen haben, wenn das eine aus dem anderen hervorgeht durch Vertauschung zweier unteren Indices.

Wenn man unter p das Produkt P versteht unter der Voraussetzung von drei Elementen, so findet man auf diese Weise die Entwickelung des Produktes p:

17) $$p = + a_0^0 a_1^1 a_2^2 - a_0^0 a_2^1 a_1^2 - a_1^0 a_0^1 a_2^2 + a_1^0 a_2^1 a_0^2 + a_2^0 a_0^1 a_1^2 - a_2^0 a_1^1 a_0^2.$$

Auch in dem Falle von vier Elementen wird man der Entwickelung des Produktes P einen gewissen praktischen Werth beimessen, wenn man voraussehen kann, dass diese aus 12 positiven und 12 negativen Gliedern bestehende Entwickelung unter geeigneten Annahmen in der analytischen Geometrie den kubischen Inhalt eines durch seine Ecken gegebenen Tetraeders ausdrückt.

Durch Permutation der Exponenten 0, 1, . . . n in dem Anfangs-Gliede 16) der Entwickelung des Produktes P entstehen, wenn man vorläufig absieht von den Vorzeichen, auch alle Π $(n+1)$ Glieder der Entwickelung. Wenn wir nun nachweisen können, dass aus jedem Gliede durch Vertauschung zweier Exponenten ein Glied der Entwickelung mit dem entgegengesetzten Vorzeichen hervorgeht, so werden wir sagen können, dass dieselbe Regel zur Bildung der Entwickelung des Produktes aus dem Anfangs-Gliede 16) für die Exponenten ebenso gelte, wie für die unteren Indices. Der Nachweis soll jetzt gegeben werden.

Irgend ein Glied der Entwickelung des Produktes P ist, wenn wir unter $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ die Exponenten 0, 1, . . . n in irgend welcher Reihenfolge verstehen:

18) . . . . $\pm\, a_0^{\alpha_0}\, a_1^{\alpha_1} \;.\;.\; a_k^{\alpha_k} \;.\;.\; a_\lambda^{\alpha_\lambda} \;.\;.\; a_n^{\alpha_n}.$

Durch Vertauschung der beiden unteren Indices k und λ ergiebt sich daraus das Glied der Entwickelung:

19) . . . $\mp\, a_0^{\alpha_0}\, a_1^{\alpha_1} \;.\;.\; a_\lambda^{\alpha_k} \;.\;.\; a_k^{\alpha_\lambda} \;.\;.\; a_n^{\alpha_n}.$

Dieses Glied ergiebt sich aber auch aus dem vorhergehenden, wenn man die beiden Exponenten α_k und α_λ mit einander vertauscht.

Wir fassen nun die an der Entwickelung des Produktes P gemachten Bemerkungen kurz zusammen, wie folgt:

20) Man braucht aus der Entwickelung des Produktes P nur ein einziges Glied zu kennen, um daraus alle Glieder in doppelter Weise herzuleiten. Abgesehen von den Vorzeichen ergeben sich dieselben entweder durch Permutation der unteren Indices der Elemente oder durch Permutation der Exponenten. Die Vorzeichen bestimmen sich daraus, dass je zwei Glieder entgegengesetzte Vorzeichen haben, wenn das eine Glied aus dem anderen hervorgeht entweder durch Vertauschung zweier unteren Indices, oder durch Vertauschung zweier Exponenten.

Entwickelt man das Produkt p der Differenzen von drei Elementen aus dem Anfangs-Gliede nach der zweiten Art, so findet man:

$$p = + a_0^0 a_1^1 a_2^2 - a_0^0 a_1^2 a_2^1 - a_0^1 a_1^0 a_2^2 + a_0^1 a_1^2 a_2^0 + a_0^2 a_1^0 a_2^1 - a_0^2 a_1^1 a_2^0,$$

in vollständiger Uebereinstimmung mit der Entwickelung 17). Man sieht aber hier, dass es erlaubt ist in der Entwickelung des Produktes p sämmtliche Exponenten mit den ihnen entsprechenden unteren Indices zu vertauschen, ohne dadurch die Entwickelung zu ändern. Auf Grund des Satzes 20) lässt sich dasselbe von der Entwickelung des Produktes P aus dem Anfangs-Gliede sagen. Da wir nun beabsichtigen, von dieser Bemerkung noch weiteren Nutzen zu ziehen, so drücken wir dieselbe als einen Satz aus wie folgt;

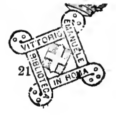
21) In der Entwickelung des Produktes P ist es erlaubt ohne Aenderung derselben sämmtliche Exponenten mit den ihnen entsprechenden unteren Indices zu vertauschen.

Wir schliessen diesen Abschnitt, welcher die Eigenschaften der einfachsten alternirenden Function zum Gegenstande hatte, mit der Aufstellung von zwei Sätzen, die sich nach dem Vorhergehenden von selbst verstehen, die wir aber darum besonders aufführen, weil sie in dem folgenden Abschnitte von den Determinanten ihr Analogon finden werden.

22) Die Entwickelung des Produktes P ändert nur ihr Vorzeichen, wenn man in derselben entweder zwei untere Indices der Elemente oder zwei Exponenten mit einander vertauscht.

23) Die Entwickelung des Produktes P verschwindet, wenn man entweder für einen unteren Index der Elemente einen anderen unteren Index setzt, oder wenn man für einen Exponenten einen anderen Exponenten setzt.

Der erste von diesen Sätzen drückt die Fundamentaleigenschaft der alternirenden Function P nur anders aus und stützt sich in seinem zweiten Theile auf den Satz 21). Der letzte Satz behauptet nichts weiter, als dass das Produkt P verschwindet, wenn einer seiner Factoren verschwindet und macht in dem zweiten Theile ebenfalls von dem Satze 21) Gebrauch.



Determinanten.

Es ist in der Algebra und in der Analysis keinesweges gleichgültig, welche Bezeichnungen man für diejenigen Grössen wählt, mit welchen man operiren will. Sie sollen die Grössen irgend wie charakterisiren. Auch in der Bezeichnung der Operationen, welche mit den gegebenen Grössen vorgenommen werden sollen, macht sich eine grosse Kunst bemerkbar, die wir von unseren Vorfahren ererbt und dann weiter gebildet haben. Es ist gewiss nicht zu viel gesagt, wenn man behauptet, dass die Lösung einer grossen Zahl von Problemen einzig und allein von der geeigneten Wahl der Bezeichnungen abhängt.

In Berücksichtigung dieses haben wir in dem vorhergehenden Abschnitte $(n+1)$ gleichartige Elemente mit dem Buchstaben a bezeichnet und denselben die Zahlen $0, 1, \ldots n$ als untere Indices beigegeben, um dadurch die Zahl der Elemente anzudeuten. Als wir vordem von linearen Gleichungen handelten, haben wir die $(n+1)^2$ Coefficienten der Unbekannten mit dem Zeichen a_k^λ ausgedrückt, um durch den unteren Index k anzudeuten, welcher Unbekannten der Coefficient angehört, und durch den oberen Index λ auf die Gleichung aufmerksam zu machen, in welcher der Coefficient vorkommt. Der obere Index λ wurde überdies gewählt, um ihn in einem speciellen Falle gleich als Exponenten zu gebrauchen.

Der gegenwärtige Abschnitt wird von einem Ausdrucke handeln von $(n+1)^2$ von einander ganz unabhängigen Elementen, deren untere Indices eine gewisse Gleichberechtigung der Elemente andeuten sollen, gleich wie die oberen Indices. Dieser Ausdruck heisst Determinante.

24) Die Determinante von $(n+1)^2$ Elementen a entsteht aus der Entwickelung des in 15) angegebenen Produktes P aus dem positiven Anfangs-Gliede 16), wenn man in der Entwickelung sämmtliche Exponenten der $(n+1)$ Elemente a_k obere Indices bedeuten lässt.

Eine wirkliche Determinante von 9 Elementen sehen wir nach dieser Definition vor uns, wenn wir den Ausdruck p in 17) anschauen in der Voraussetzung, dass die Exponenten dort obere Indices bedeuten. Auch im Allgemeinen unterscheidet sich eine Determinante von $(n+1)^2$ Elementen a dem äusseren Ansehen nach nicht von der angegebenen Entwickelung des Produktes P. Die oberen Indices der Elemente in der Determinante haben aber in der Entwickelung des Produktes P die Bedeutung von Exponenten. Es geht darum auch die Determinante in das Produkt P über, wenn man den oberen Indices der Elemente die Bedeutung von Exponenten giebt. Die Determinante ist der allgemeine Ausdruck, das Produkt P ein specieller Fall davon. Diese Bemerkung fordert zu der Untersuchung auf, in wie weit die in dem vorhergehenden Abschnitte hervorgehobenen Eigenschaften des Produktes P sich ausdehnen lassen auf die Determinante.

Auf Grund unserer Auseinandersetzung können wir den in dem vorhergehenden Abschnitte bewiesenen Satz 20) hier so ausdrücken:

24) Man braucht von einer Determinante nur ein einziges Glied zu kennen, um daraus alle übrigen Glieder derselben in doppelter Weise herzuleiten. Abgesehen von den Vorzeichen ergeben sich dieselben entweder durch Permutation der unteren Indices der Elemente oder durch Permutation der oberen Indices. Die Vorzeichen bestimmen sich daraus, dass je zwei Glieder entgegengesetzte Vorzeichen haben, wenn das eine Glied aus dem anderen hervorgeht entweder durch Vertauschung zweier unteren Indices oder durch Vertauschung zweier oberen Indices.

Da die Kenntniss eines Gliedes der Determinante hinreicht, um daraus alle Glieder derselben zu entwickeln, so kann dieses eine Glied als Bezeichnung für die ganze Determinante dienen. Gewöhnlich wählt man das positive Anfangsglied zur Bezeichnung der aus $(n+1)^2$ Elementen zusammengesetzten Determinante A und bezeichnet dieselbe mit dem Summenzeichen:

25) . . . . $A = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \ldots a_n^n$.

Das obere positive Vorzeichen aber soll ausdrücken, dass das angegebene Anfangsglied selbst positiv ist, das doppelte Vorzeichen soll darauf aufmerksam machen, dass die Glieder der Determinante in der Summe abwechselnd das positive und negative Vorzeichen haben.

Wenn man andere Glieder der Determinante zur Bezeichnung der Determinante wählt, so erhält man nach dem Vorhergehenden verschiedene Zeichen für eine und dieselbe Determinante, wie z. B. für die nach 17) für den Fall von 9 Elementen vollständig hingeschriebene Determinante A:

$$26) \ldots \quad A = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 a_2^2 = a_0^0 a_1^1 a_2^2 - a_0^0 a_2^1 a_1^2 - a_1^0 a_0^1 a_2^2 + a_1^0 a_2^1 a_0^2 + a_2^0 a_0^1 a_1^2 - a_2^0 a_1^1 a_0^2.$$

Man kann diese Determinante hiernach verschieden ausdrücken wie folgt:

$$A = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 a_2^2, \quad A = - \Sigma \pm a_0^0 a_2^1 a_1^2, \quad A = - \Sigma \pm a_1^0 a_0^1 a_2^2,$$
$$A = \Sigma \pm a_1^0 a_2^1 a_0^2, \quad A = \Sigma \pm a_2^0 a_0^1 a_1^2, \quad A = - \Sigma \pm a_2^0 a_1^1 a_0^2,$$

oder auf Grund der zweiten Entwickelung von p in dem vorhergehenden Abschnitte noch auf andere Art.

Auf diese Weise kann man im Allgemeinen eine und dieselbe Determinante von $(n+1)^2$ Elementen auf Grund der in 25) eingeführten Bezeichnung sehr verschieden ausdrücken. Setzt man nämlich in 25) an Stelle des positiven Anfangs-Gliedes $a_0^0 a_1^1 \ldots a_n^n$ unter das Summenzeichen irgend ein anderes Anfangs-Glied abgesehen von seinem Vorzeichen, so richtet sich das Vorzeichen der Summe Σ nach dem Vorzeichen des neuen Anfangs-Gliedes in der Entwickelung der Determinante. Es lässt sich demnach die aus $(n+1)^2$ Elementen a zusammengesetzte Determinante A in 25), wenn man unter $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ die Zahlen 0, 1, ... n in irgend welcher Reihenfolge versteht und unter $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n$ dieselben Zahlen in derselben oder in einer anderen Reihenfolge, allgemein ausdrücken wie folgt:

$$27) \ldots\ldots \quad A = \pm \Sigma \pm a_{\beta_0}^{\alpha_0} a_{\beta_1}^{\alpha_1} \ldots a_{\beta_n}^{\alpha_n}.$$

Das positive Vorzeichen vor dem Summenzeichen gilt, wenn das Anfangs-Glied unter dem Summenzeichen in der Entwickelung

der Determinante 25) positiv ist, im anderen Falle gilt das negative Vorzeichen vor dem Summenzeichen.

Diese verschiedenen Bezeichnungen eines und desselben Gegenstandes, der Determinante, mögen unlogisch erscheinen. Wenn man aber bedenkt, dass eine jede andere Bezeichnung zugleich eine andere Eigenschaft der Determinante darlegt, so wird man sich mit den verschiedenen Bezeichnungen gern befreunden. Ist es doch die einzige Aufgabe der gesammten Analysis zu ermitteln, welch' verschiedene Ausdrücke der Einheit gleich sind.

Die von allen Mathematikern adoptirte Bezeichnung der Determinante A in 25), welche Bezeichnung nur $(n+1)$ Elemente enthält, reicht nicht aus, um gewisse, mit anderen Elementen der Determinante vorzunehmende Operationen in dem Ausdrucke der Determinante selbst anzudeuten. Man hat sich deshalb veranlasst gesehen, für die Determinante zugleich noch ein anderes Zeichen einzuführen, welches sämmtliche Elemente der Determinante enthält:

$$28) \ldots\ldots\ldots A = \begin{vmatrix} a_0^0, a_1^0, \ldots a_n^0 \\ a_0^1, a_1^1, \ldots a_n^1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_0^n, a_1^n, \ldots a_n^n \end{vmatrix}$$

Das positive Anfangs-Glied der Determinante, durch welches in 25) die Determinante A bezeichnet wurde, erhält man hieraus, wenn man das Produkt der $(n+1)$ Elemente bildet, welche in der Diagonale des von sämmtlichen Elementen gebildeten Quadrates stehen.

Wie nun zur Bildung des positiven Anfangs-Gliedes eine jede Horizontalreihe der Elemente und eine jede Vertikalreihe nur einen Factor hergiebt, so trifft dieses auch für jedes andere Glied der Determinante zu. Denn in einem jeden Gliede der Determinante sind, wie wir gesehen haben, die oberen wie die unteren Indices die Zahlen 0, 1, . . . n in irgend einer Reihenfolge.

Da, wie schon oben bemerkt wurde, die entwickelte Determinante A von dem entwickelten Produkte P sich dem äusseren Ansehen nach nicht unterscheidet, so können wir auf Grund von 21) sagen:

29) In der Determinante ist es erlaubt, ohne Aenderung derselben, sämmtliche obere Indices der Elemente mit den ihnen entsprechenden unteren Indices zu vertauschen.

Hieraus entspringt nun die neue Bezeichnung der Determinante A in 28):

$$30) \ldots\ldots\ldots A = \begin{vmatrix} a_0^0, a_0^1, \ldots a_0^n \\ a_1^0, a_1^1, \ldots a_1^n \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_n^0, a_n^1, \ldots a_n^n \end{vmatrix}$$

Aus demselben Grunde, aus welchem der Satz 29) aus 21) folgte, geht aus dem Satze 22) der folgende hervor:

31) Die Determinante ändert nur ihr Vorzeichen, wenn man in derselben entweder zwei untere Indices der Elemente oder zwei obere Indices mit einander vertauscht.

Beispiele für die Vertauschung der unteren Indices in der Determinante 26) von 9 Elementen sind an der bezeichneten Stelle angegeben in der verschiedentlichen Bezeichnung derselben Determinante.

Im Hinblick auf die Bezeichnungen 28) und 30) der Determinante A wollen wir den angegebenen Satz 31) so aussprechen:

32) Die Determinante ändert nur ihr Vorzeichen, wenn man die correspondirenden Elemente zweier Horizontalreihen oder zweier Vertikalreihen mit einander vertauscht.

Wir haben nun alle anderen, in dem vorhergehenden Abschnitte über das Produkt P aufgeführten Sätze übertragen auf die Determinante A. Es bleibt noch übrig das Analogon aufzusuchen für den letzten Satz 23).

Zu diesem Zwecke führen wir die beiden Glieder 18) und 19) der Entwickelung des Produktes P wieder vor:

$$\pm\ a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \,..\, a_k^{\alpha_k} \ldots a_\lambda^{\alpha_\lambda} \,..\, a_n^{\alpha_n}$$
$$\mp\ a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \,..\, a_\lambda^{\alpha_k} \ldots a_k^{\alpha_\lambda} \,..\, a_n^{\alpha_n}$$

mit der Bemerkung, dass, wie diese beiden Glieder von

entgegengesetzten Vorzeichen sich bedingen durch die Vertauschung der unteren Indices k und λ von zwei der $(n+1)$ Elemente a, so auch einem jeden Gliede der Entwickelung des Produktes P ein bestimmtes anderes Glied mit dem entgegengesetzten Vorzeichen entspricht. Die ganze Entwickelung des Produktes P besteht demnach aus Paaren von Gliedern, von denen immer ein Glied das andere mit entgegengesetztem Vorzeichen bedingt, welches aus ihm erhalten wird durch Vertauschung der unteren Indices k und λ.

Das aufgeführte Glieder-Paar wird nach der Definition 24) ein Glieder-Paar der Determinante A, wenn man die Exponenten α obere Indices bedeuten lässt. Da dieses Glieder-Paar sich aber, wie man sehen kann, vernichtet, wenn man an Stelle des unteren Index λ des Elementes a den unteren Index k setzt, ohne Rücksicht darauf, ob die Exponenten α wirkliche Exponenten oder obere Indices bedeuten wie in der Determinante, so vernichten sich auch alle übrigen Glieder-Paare der Determinante und es verschwindet die Determinante, wenn man für den unteren Index λ der Elemente den Index k setzt. Den hierdurch bewiesenen Satz geben wir wegen seiner vielfachen Anwendung in doppeltem Ausdrucke wieder:

33) Die Determinante verschwindet, wenn man in derselben für einen unteren Index der Elemente einen anderen unteren Index setzt, oder für einen oberen Index der Elemente einen anderen oberen Index.

34) Die Determinante verschwindet, wenn die entsprechenden Elemente zweier Horizontalreihen der Elemente oder zweier Vertikalreihen einander gleich werden.

Es verschwindet darum die in 27) aufgeführte Determinante A, wenn zwei von den ganzen Zahlen α oder zwei von den ganzen Zahlen β einander gleich werden. Von dieser Bemerkung werden wir später bei dem Beweise des Multiplications - Theoremes der Determinanten Gebrauch machen.

Wenn man sich die Determinante A wirklich entwickelt vorstellt, so leuchtet es ein, dass viele von den $\Pi(n+1)$ Gliedern

derselben das Element a_k^λ als Factor enthalten. Fasst man alle diese Glieder der Determinante zusammen, die den gemeinsamen Factor a_k^λ haben, so stellt sich die Summe derselben dar unter der Form eines Produktes $a_k^\lambda A_k^\lambda$, indem der zweite Factor A_k^λ die Summe der Glieder ausdrückt mit Weglassung des gemeinsamen Factors. Dieser zweite Factor heisst Unterdeterminante. Da hiernach einem jeden der $(n+1)^2$ Elemente der Determinante eine Unterdeterminante entspricht, so hat man eben soviel Unterdeterminanten als Elemente der Determinante. Diese Unterdeterminanten sollen den Gegenstand der folgenden Untersuchung bilden.

In dem Falle von 9 Elementen der Determinante A in 26) können wir nach der Definition leicht sämmtliche Unterdeterminanten hinschreiben:

$$35)\quad \begin{array}{lll} A_0^0 = (a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2), & A_1^0 = -(a_0^1 a_2^2 - a_2^1 a_0^2), & A_2^0 = (a_0^1 a_1^2 - a_1^1 a_0^2) \\ A_0^1 = -(a_1^0 a_2^2 - a_2^0 a_1^2), & A_1^1 = (a_0^0 a_2^2 - a_2^0 a_0^2), & A_2^1 = -(a_0^0 a_1^2 - a_1^0 a_0^2) \\ A_0^2 = (a_1^0 a_2^1 - a_2^0 a_1^1), & A_1^2 = -(a_0^0 a_2^1 - a_2^0 a_0^1), & A_2^2 = (a_0^0 a_1^1 - a_1^0 a_0^1). \end{array}$$

Sie lassen sich auch als Determinanten von nur 4 Elementen so ausdrücken:

$$36)\quad \begin{array}{lll} A_0^0 = \Sigma \pm a_1^1 a_2^2, & A_1^0 = -\Sigma \pm a_0^1 a_2^2, & A_2^0 = \Sigma \pm a_0^1 a_1^2 \\ A_0^1 = -\Sigma \pm a_1^0 a_2^2, & A_1^1 = \Sigma \pm a_0^0 a_2^2, & A_2^1 = -\Sigma \pm a_0^0 a_1^2 \\ A_0^2 = \Sigma \pm a_1^0 a_2^1, & A_1^2 = -\Sigma \pm a_0^0 a_2^1, & A_2^2 = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1. \end{array}$$

Man wird hier bemerken, dass die Unterdeterminante A_k^λ aus der Determinante $A = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 a_2^2$ gebildet werden kann, wenn man in dem positiven Anfangs-Gliede derselben unter dem Summenzeichen den unteren Index k, den oberen Index λ und einen Factor a unterdrückt, ohne die Reihenfolge der übrig bleibenden Indices zu ändern. Giebt man dem Summenzeichen hierauf das Vorzeichen $(-1)^{k+\lambda}$, so hat man die Unterdeterminante A_k^λ. Es ist dieses eine Regel, welche sich auch ausdehnen lässt auf die Bildung der Unterdeterminanten von irgend einer Determinante, wie nachgewiesen werden soll.

Nach der Definition der Unterdeterminanten A_k^λ der allgemein in 25) bezeichneten Determinante A ist die Summe aller Glieder der Determinante, welche den Factor a_k^λ enthalten $= a_k^\lambda A_k^\lambda$. Hätte nun irgend ein Glied der Unterdeterminante

A_k^λ den unteren Index k aufzuweisen, so gäbe dieses mit a_k^λ multiplicirt ein Glied der Determinante mit zwei gleichen unteren Indices k. Da ein solches Glied in der Determinante aber eben so wenig auftritt als ein Glied, welches zwei gleiche obere Indices λ enthält, so kann man sagen:

37) In der Unterdeterminante A_k^λ ist kein Glied zu finden, dessen Elemente einen unteren Index k oder einen oberen Index λ haben.

Von den Relationen, welche zwischen der Determinante, den Elementen und den Unterdeterminanten bestehen, heben wir zunächst folgende hervor:

$$38) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} A &= a_0^\lambda A_0^\lambda + a_1^\lambda A_1^\lambda + \ldots a_n^\lambda A_n^\lambda \\ 0 &= a_0^k A_0^\lambda + a_1^k A_1^\lambda + \ldots a_n^k A_n^\lambda. \end{aligned}$$

Erinnert man sich nämlich der Entwickelung der Determinante A aus ihrem positiven Anfangs-Gliede $a_0^0 a_1^1 \ldots a_n^n$ durch Permutation der unteren Indices, so sieht man, dass die Determinante nur Glieder enthalten kann, welche entweder den Factor a_0^λ oder a_1^λ oder endlich den Factor a_n^λ haben. Da Glieder anderer Art ausgeschlossen sind, so hat man auf Grund der Definition der Unterdeterminanten die erste Gleichung 38). Die zweite Gleichung folgt aus dieser, wenn man in der Determinante A für den oberen Index λ der Elemente einen anderen oberen Index k setzt auf Grund der Sätze 33) und 37).

Die erste Gleichung 38) beweiset, dass die Determinante A übergeht in die Unterdeterminante A_k^λ, wenn man in derselben setzt $a_0^\lambda = 0$, $a_1^\lambda = 0, \ldots a_k^\lambda = 1, \ldots a_n^\lambda = 0$, nämlich in:

$$A_k = \begin{vmatrix} a_0^0, & \ldots a_k^0, & a_{k+1}^0, & \ldots a_n^0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots 1, & 0, & \ldots 0 \\ a_0^{\lambda+1}, & \ldots a_k^{\lambda+1}, & a_{k+1}^{\lambda+1}, & \ldots a_n^{\lambda+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0^n, & \ldots a_k^n, & a_{k+1}^n, & \ldots a_n^n \end{vmatrix}$$

oder, da nach Satz 37) die angegebene Unterdeterminante in ihren Gliedern den unteren Index k der Elemente nicht aufweisen kann, noch einfacher in:

$$A_k^\lambda = \begin{vmatrix} a_0^0 & \ldots 0, & a_{k+1}^0, & \ldots & a_n^0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & \ldots 1, & 0, & \ldots & 0 \\ a_0^{\lambda+1}, & \ldots 0, & a_{k+1}^{\lambda+1}, & \ldots & a_n^{\lambda+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0^n, & \ldots 0, & a_{k+1}^n, & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Eine jede Unterdeterminante ist demnach wieder eine Determinante derselben Ordnung als die Determinante, von der sie abhängt, wenn man die Ordnung der Determinante bemisst nach der Zahl der Horizontal-Reihen oder Vertikal-Reihen ihrer Elemente. Wie aber in dem Falle der dritten Ordnung der Determinante A in 26) die Unterdeterminanten derselben in 36) sich ausdrücken lassen als Determinanten der nächst niederen, der zweiten Ordnung, so werden auch im Allgemeinen die Unterdeterminanten einer gegebenen Determinante sich ausdrücken lassen als Determinanten der nächst niederen Ordnung. Dieses nachzuweisen soll unsere Aufgabe sein.

Die Determinante A entsteht aus ihrem positiven Anfangs-Gliede nach 24), wenn man in diesem Gliede sämmtliche untere Indices permutirt und die Vorzeichen der Glieder nach der vorgeschriebenen Regel bestimmt. Es entstehen demnach diejenigen Glieder der Determinante, welche den Factor a_0^0 haben, aus dem positiven Anfangs-Gliede derselben, wenn man nur die unteren Indices $1, 2, \ldots n$ permutirt und die Vorzeichen dieser Glieder nach der vorgeschriebenen Regel bestimmt. Die Summe dieser Glieder ist nach der Definition der Determinante gleich $a_0^0 \, \Sigma \pm a_1^1 \, a_2^2 \ldots a_n^n$. Da nach der Definition der Unterdeterminante A_0^0 die Summe dieser Glieder der Determinante gleich $a_0^0 \, A_0^0$ ist, so hat man:

39) $\ldots\ldots\ldots \quad A_0^0 = \Sigma \pm a_1^1 \, a_2^2 \ldots a_n^n,$

eine Darstellung der Unterdeterminante A_0^0 als Determinante der nächst niederen Ordnung, als A.

Wenn man an Stelle der Determinanten-Bezeichnung 25) die Bezeichnung 28) wählt, so sieht man, dass man in letzterer nur diejenige Horizontal-Reihe und die Vertikal-Reihe

der Elemente zu unterdrücken braucht, welche das Element a_0^0 enthalten, um die Unterdeterminante von niederer Ordnung zu erhalten, welche dem Elemente a_0^0 entspricht.

Diese Regel zur Bildung der Unterdeterminante von niederer Ordnung ist allerdings nur für die, dem ersten Elemente a_0^0 in der Diagonale der Determinante A entsprechende Unterdeterminante A_0^0 bewiesen worden. Wenn man aber bedenkt, dass durch Vertauschung der Horizontal-Reihen der Elemente in der Determinante dieselbe abgesehen von dem Vorzeichen sich nicht ändert, eben so wenig wenn man Vertikal-Reihen mit einander vertauscht, so sieht man ein, dass man durch diese doppelte Vertauschung ein jedes Element der Determinante in die Stelle des ersten Elementes in der Determinante versetzen kann. Hat man nun irgend ein Element a_k^λ auf diese Weise in die erste Stelle der Diagonale versetzt, so tritt die angegebene Regel in Kraft und man kann sagen:

40) Jede Unterdeterminante einer gegebenen Determinante ist eine Determinante der nächst niederen Ordnung.

Die wirkliche Darstellung der Unterdeterminante A_k^λ beginnen wir mit der Umgestaltung der Determinante 28). Wir vertauschen in derselben die $(\lambda+1)^{te}$ Horizontal-Reihe der Elemente mit der λ^{ten} Horizontal-Reihe. In der so veränderten Determinante vertauschen wir wieder die λ^{te} Horizontal-Reihe mit der $(\lambda-1)^{ten}$ und so fort, bis die $(\lambda+1)^{te}$ Horizontal-Reihe in 28) in die Stelle der ersten Horizontal-Reihe gekommen ist. Da durch jede dieser Vertauschungen die Determinante A nur in dem Vorzeichen sich ändert, so wird die Determinante mit der $(\lambda+1)^{ten}$ Horizontal-Reihe der Determinante 28) an ihrer Spitze der Determinante A gleich sein, wenn man der ersteren den Factor $(-1)^\lambda$ beigiebt. In der mit dem angegebenen Factor behafteten Determinante kann man nun wieder die $(k+1)^{te}$ Vertikal-Reihe der Elemente successive in die Stelle der ersten Vertikal-Reihe bringen. Sie wird der Determinante A gleich sein, wenn man ihr noch den Factor $(-1)^k$ beigiebt. Die schliessliche Determinante, welche mit ihrem Factor $(-1)^{k+\lambda}$ der Determinante A gleich ist, hat nun das Element a_k^λ an der

Spitze der Diagonale. Unterdrückt man in ihr die erste Horizontal-Reihe der Elemente und die erste Vertikal-Reihe, so hat man die Unterdeterminante A_k^λ. Wir drücken das Resultat unserer Untersuchung als Satz aus wie folgt:

41) *Wenn man in der Determinante A in 28) diejenige Horizontal-Reihe und diejenige Vertikal-Reihe der Elemente unterdrückt, in welchen das Element a_k^λ steht, und durch parallele Verrückung der Elemente die Lücken wieder ausfüllt, so erhält man eine Determinante der nächst niederen Ordnung, welche unter Zuziehung des Factors $(-1)^{k+\lambda}$ die dem Elemente a_k^λ entsprechende Unterdeterminante A_k^λ darstellt.*

Wählt man die Bezeichnung 25) der Determinante A, so kann man den angegebenen Satz kurz durch folgende Gleichung wiedergeben:

42) $A_k^\lambda = (-1)^{k+\lambda}\, \Sigma \pm a_0^0 \ldots a_{k-1}^{k-1}\, a_{k+1}^k \ldots a_\lambda^{\lambda-1}\, a_{\lambda+1}^{\lambda+1} \ldots a_n^n,$

wenn man annimmt, dass $\lambda > k$. Im anderen Falle ist:

43) $A_k^\lambda = (-1)^{k+\lambda}\, \Sigma \pm a_0^0 \ldots a_{\lambda-1}^{\lambda-1}\, a_\lambda^{\lambda+1} \ldots a_{k-1}^k\, a_{k+1}^{k+1} \ldots a_n^n.$

Wenn k und λ einander gleich sind, so hat man:

44) . . . . $A_k^k = \Sigma \pm a_0^0 \ldots a_{k-1}^{k-1}\, a_{k+1}^{k+1} \ldots a_n^n.$

Die in 36) aufgeführten Formeln dienen zur Bestätigung der allgemeinen Formeln 42)—44).

Die angegebene Darstellung der Unterdeterminante als Determinante der nächst niederen Ordnung ging hervor aus der in 38) dargelegten Relation zwischen Determinante, Unterdeterminanten und ihren Elementen. Zwischen ihnen bestehen aber noch folgende Relationen:

45) . . . . . .
$$A = a_\lambda^0 A_\lambda^0 + a_\lambda^1 A_\lambda^1 + \ldots a_\lambda^n A_\lambda^n$$
$$0 = a_k^0 A_\lambda^0 + a_k^1 A_\lambda + \ldots a_k^n A_\lambda^n.$$

Die erste von diesen Gleichungen ergiebt sich aus der Entwickelung der Determinante A aus ihrem Anfangs-Gliede $a_0^0 a_1^1 \ldots a_n^n$ durch Permutation der oberen Indices und der Definition der Unterdeterminanten. Die zweite Gleichung folgt aus der ersten, wenn man in der Determinante A für

den unteren Index λ der Elemente einen anderen unteren Index k setzt auf Grund der Sätze 33) und 37).

Die Nummern 38) und 45) umfassen sämmtliche Relationen, welche zur Auflösung der beiden Systeme linearer Gleichungen 1) und 6) erforderlich sind. Diese Systeme Gleichungen sind in abgekürzter Form folgende:

46) . . . . . . $x^\mu = a_0^\mu x_0 + a_1^\mu x_1 + \ldots a_n^\mu x_n$

47) . . . . . . $u_\mu = a_\mu^0 u^0 + a_\mu^1 u^1 + \ldots a_\mu^n u^n$.

Multiplicirt man die Gleichung 46) mit A_λ^μ, setzt hierauf für μ nach einander die Zahlen 0, 1, . . . n und addirt, so verschwinden auf der rechten Seite der Gleichung auf Grund von 45) sämmtliche Unbekannte mit Ausnahme der Unbekannten x_λ, welche den Factor A erhält. Multiplicirt man die Gleichung 47) mit A_μ^λ, setzt hierauf für μ nach einander die Zahlen 0, 1, . . . n und addirt, so verschwinden auf der rechten Seite der Gleichung auf Grund von 38) sämmtliche Unbekannte mit Ausnahme der Unbekannten u^λ, welche den Factor A erhält.

Man hat demnach folgende Auflösungen der Gleichungen 46) und 47):

48) . . . . . . $Ax_\lambda = x^0 A_\lambda^0 + x^1 A_\lambda^1 + \ldots x^n A_\lambda^n$

49) . . . . . . $Au^\lambda = u_0 A_0^\lambda + u_1 A_1^\lambda + \ldots u_n A_n^\lambda$.

Die Werthe der Unbekannten stellen sich hiernach als Brüche dar mit demselben Nenner A. Die Dimensionen der Zähler und Nenner in Rücksicht auf die in den linearen Gleichungen als bekannt vorausgesetzten Grössen sind gleich der Zahl der Gleichungen oder der Unbekannten. Diese erst hier bewiesene Thatsache haben wir bereits in dem ersten Abschnitte über lineare Gleichungen in Aussicht gestellt, um dort auf die Mängel der Eliminationsmethode aufmerksam zu machen.

Man kann die Unbekannten x_λ und u^λ in den Systemen Gleichungen 46) und 47) auch als Brüche darstellen, deren Zähler und Nenner Determinanten von derselben Ordnung sind. Die Kenntniss der Unterdeterminanten, welche in 48) und 49) vorausgesetzt wurde, wird entbehrlich, wenn

wir die Unbekannten auf Grund der Bezeichnungen 30) und 28) ausdrücken, wie folgt:

$$50) \quad \dots \; x_\lambda = \begin{vmatrix} a_0^0, & a_0^1, & \dots & a_0^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^0, & x^1, & \dots & x^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^0, & a_n^1, & \dots & a_n^n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0^0, & a_0^1, & \dots & a_0^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_\lambda^0, & a_\lambda^1, & \dots & a_\lambda^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^0, & a_n^1, & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

$$51) \quad \dots \; u^\lambda = \begin{vmatrix} a_0^0, & a_1^0, & \dots & a_n^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_0, & u_1, & \dots & u_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^n, & a_1^n, & \dots & a_n^n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0^0, & a_1^0, & \dots & a_n^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^\lambda, & a_1^\lambda, & \dots & a_n^\lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^n, & a_1^n, & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Die Gleichung 50) ist nichts anderes, als eine andere Darstellung der Gleichung 48) unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die in der ersten Gleichung 45) dargestellte Determinante A übergeht in den rechten Theil der Gleichung 48), wenn man in der Determinante A für die Elemente $a_\lambda^0, a_\lambda^1, \dots a_\lambda^n$ respective setzt $x^0, x^1, \dots x^n$. In ähnlicher Art geht aus der Gleichung 49) die Gleichung 51) hervor.

Die Gleichungen 48) und 49) beweisen auf's Neue den in 9) ausgesprochenen Satz.

Wenn man in den Systemen Gleichungen 46) und 47) für alle Zahlen μ setzt $x^\mu = u_\mu$ und ferner annimmt $a_k^\lambda = a_\lambda^k$ für alle Zahlen k und λ, so unterscheiden sich die angegebenen beiden Systeme nur in der Bezeichnug der Unbekannten. Ihre Auflösungen müssen unter diesen Umständen dieselben sein und zwar unabhängig von den Grössen x^μ, welche mit den ihnen gleichen Grössen u_μ beliebige Werthe annehmen dürfen. Das ist aber nicht möglich, wenn nicht $A_\lambda^0 = A_0^\lambda$, $A_\lambda^1 = A_1^\lambda, \dots$ und allgemein $A_\lambda^k = A_k^\lambda$ ist. Dieses drückt der folgende Satz aus:

52) W e n n i n e i n e r D e t e r m i n a n t e j e z w e i E l e m e n t e , d i e d u r c h V e r t a u s c h u n g d e s o b e r e n I n d e x m i t d e m u n t e r e n i n e i n a n d e r ü b e r g e h e n , g l e i c h e W e r t h e h a b e n , s o h a b e n a u c h d i e i h n e n e n t s p r e c h e n d e n U n t e r d e t e r m i n a n t e n g l e i c h e W e r t h e .

Hieraus ergiebt sich nun wieder im Hinblick auf die Gleichungen 46) und ihre Auflösungen 48) der Satz 10) von linearen Gleichungen.

Haben wir nun, so wird man sich vielleicht fragen, mit all' den vorausgegangenen Entwickelungen ein System allgemeiner, linearer Gleichungen wirklich aufgelöset? Die Beantwortung dieser Frage hängt ab von dem Standpunkte, welchen man einnimmt. Bringt man nämlich die Arbeit der Entwickelung von Determinanten nicht in Anrechnung, so hat man in 50) die wirkliche Auflösung des allgemeinen Systemes linearer Gleichungen 46). In dem anderen Falle ist in dem Vorhergehenden nur gesorgt worden für die Auflösung von folgenden drei linearen Gleichungen:

$$53) \quad \begin{aligned} x^0 &= a_0^0 x_0 + a_1^0 x_1 + a_2^0 x_2 \\ x^1 &= a_0^1 x_0 + a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 \\ x^2 &= a_0^2 x_0 + a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 \end{aligned}$$

Ihre Auflösungen entnehmen wir aus 48):

$$54) \quad \begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{A}\left\{x^0 A_0^0 + x^1 A_0^1 + x^2 A_0^2\right\} \\ x_1 &= \frac{1}{A}\left\{x^0 A_1^0 + x^1 A_1^1 + x^2 A_1^2\right\} \\ x_2 &= \frac{1}{A}\left\{x^0 A_2^0 + x^1 A_2^1 + x^2 A_2^2\right\} \end{aligned}$$

Die Bedeutung der Symbole für die Determinante A und ihre Unterdeterminanten findet man in 26) und 35). Ihre dort angegebenen Werthe in 54) einzusetzen halten wir für ganz überflüssig, da wir für die Unbekannten x complicirte Ausdrücke erhalten würden, die sich schwer durchschauen lassen.

Von dem Versuche, die Werthe der Unbekannten aus 4 linearen Gleichungen wirklich hinzuschreiben, wird man wohl ganz abstehen, wenn man bedenkt, dass dieselben Brüche sind, deren Nenner und Zähler je aus 24 Gliedern bestehen.

Die Gleichungen 48) sind die Auflösungen der allgemeinsten linearen Gleichungen 46) mit den Unbekannten $x_0, x_1, \ldots x_n$. Es müssen sich also aus 48) die Auflösungen 13) der Gleichungen 1) ableiten lassen unter der Voraus-

setzung, dass die oberen Indices der gegebenen Grössen a und x Exponenten bedeuten. Von der Determinante A weiss man bereits, dass sie unter der gemachten Voraussetzung in das Produkt 15) P übergeht. Es drängt sich aber die Frage auf, was aus den Unterdeterminanten A_λ^k in 48) wird? Eine in dieser Richtung angestellte Untersuchung wird lehren, dass auch die Unterdeterminanten A_λ^k in Factoren zerfallen, von welchen nur ein einziger Factor unter den Factoren von P nicht wieder zu finden ist.

In dem engsten Anschlusse an die Auflösungen der linearen Gleichungen steht die Aufgabe der Elimination der Unbekannten aus linearen Gleichungen. Liegt nämlich ein System von $(n+1)$ linearen Gleichungen vor mit n Unbekannten $y_1, y_2, \ldots y_n$:

55) $\ldots\ldots\ldots 0 = a_0^\mu + a_1^\mu y_1 + \ldots a_n^\mu y_n,$

so kann man die Werthe der Unbekannten sich etwa aus den n ersten Gleichungen berechnet vorstellen. Setzt man dann diese Werthe der Unbekannten in die letzte Gleichung, so wird derselben im Allgemeinen nicht genügt. Es muss vielmehr eine Bedingungs-Gleichung zwischen den bekannten Grössen in den Gleichungen 55) existiren, wenn die $(n+1)$ Gleichungen mit n Unbekannten zugleich bestehen sollen. Diese Bedingungs-Gleichung in der einfachsten Form aufzustellen ist die Aufgabe der Elimination.

Um diese Aufgabe zu lösen, machen wir die Gleichungen 55) homogen, indem wir setzen: $y_k = \frac{x_k}{x_0}$ und mit x_0 die Gleichungen multipliciren. Dadurch nehmen sie die Gestalt an:

56) $\ldots\ldots\ldots 0 = a_0^\mu x_0 + a_1^\mu x_1 + \ldots a_n^\mu x_n.$

In dieser Gestalt sind die Gleichungen nur ein specieller Fall der Gleichungen 46), nämlich wenn $x^0 = x^1 = \ldots x^n = 0$. Da aber die Auflösungen 48) der Gleichungen 46) nichts anderes sind, als dieselben Gleichungen in anderer Gestalt, so haben wir für den speciellen Fall $Ax_k = 0$. Da nun von den Grössen $x_0, x_1, \ldots x_n$ wenigstens eine von der Null verschieden sein soll, so hat man schliesslich $A = 0$ als das

Resultat der Elimination der Unbekannten aus dem Systeme Gleichungen 55). Wir drücken dieses kurz als Satz aus:

57) Man erhält das Resultat der Elimination aus $(n+1)$ linearen, homogenen Gleichungen mit der gleichen Zahl von Unbekannten, wenn man die aus den Coefficienten der Unbekannten gebildete Determinante gleich 0 setzt.

Wenn die gegebenen Gleichungen, wie in 55), nicht homogen sind, so kann man sie nach dem Vorhergehenden homogen machen und dann den Satz 57) in Anwendung bringen.

In dem Falle zweier Gleichungen $M=0$ und $N=0$ mit einer Unbekannten x steht der Elimination der Unbekannten keine Schwierigkeit entgegen, wenn die Gleichungen linear sind. Sind die Gleichungen aber in Rücksicht auf die Unbekannte respective vom m^{ten} und vom n^{ten} Grade, so haben wir nach dem Vorhergehenden doch keine Regel die Elimination zu bewirken. Es ist ein geistreicher Gedanke von Sylvester, die Elimination der einen Unbekannten aus zwei Gleichungen irgend welcher Grade zurückzuführen auf die Elimination von Unbekannten aus linearen Gleichungen. Er vollführt dieses in folgender Art:

Wenn $M=0$ und $N=0$ die gegebenen Gleichungen sind respective vom m^{ten} und n^{ten} Grade, so bestehen mit ihnen die Gleichungen:

$$M=0,\ xM=0,\ x^2M=0,\ \ldots\ x^{n-1}M=0$$
$$N=0,\ xN=0,\ x^2N=0,\ \ldots\ x^{m-1}N=0.$$

Diese $(m+n)$ nach Potenzen von x entwickelten Gleichungen sind lineare Gleichungen, wenn man die Potenzen $x, x^2, \ldots\ x^{m+n-1}$ als Unbekannte betrachtet. In dieser Auffassung hat man $(m+n)$ lineare Gleichungen mit $(m+n-1)$ Unbekannten, deren Elimination nach der angegebenen Regel durch Determinanten-Bildung ausgeführt werden kann. Wenn an Stelle von zwei Gleichungen mit einer Unbekannten drei Gleichungen mit zwei Unbekannten vorliegen, so kennt man bis zur Zeit noch kein Eliminations-Verfahren, welches allen Ansprüchen in dem Grade genügt, als das angegebene von Sylvester für zwei Gleichungen.

Das Vorhergehende beweiset nur den Nutzen der Determinanten in einer bestimmten Richtung, der Algebra. Wenn man aber weitere Eigenschaften der Determinanten in das Auge fasst, so erstreckt sich ihre Herrschaft über die ganze Analysis. Wir fahren darum fort in der Entwickelung der Eigenschaften der Determinante.

Multiplicirt man die erste Gleichung 38) mit einem Factor ϱ, so sieht man, dass der rechte Theil der Gleichung aus der Determinante A hervorgeht, wenn man für die Elemente a_0^λ, a_1^λ, ... a_n^λ respective setzt ϱa_0^λ, ϱa_1^λ, ... ϱa_n^λ. Diese Bemerkung können wir mit Berücksichtigung des Satzes 29) so ausdrücken:

58) Wenn man sämmtliche Elemente einer Horizontal-Reihe, oder sämmtliche Elemente einer Vertikal-Reihe der Determinante mit demselben Factor multiplicirt, so geht die Determinante über in das Produkt der Determinante und dieses Factors.

Setzt man in 38) $a_1^\lambda + \varrho a_0^k$, $a_1^\lambda + \varrho a_1^k$, ... $a_n^\lambda + \varrho a_n^k$ respective für a_0^λ, a_1^λ, ... a_n^λ, so wird diese Gleichung nicht geändert, weil der Factor von ϱ im rechten Theile der Gleichung auf Grund der zweiten Gleichung 38) verschwindet. Wir können demnach, gestützt auf 29), sagen:

59) Die Determinante bleibt ungeändert, wenn man in ihr die Elemente einer Horizontal-Reihe oder Vertikal-Reihe vermehrt um die mit demselben Factor multiplicirten, correspondirenden Elemente einer anderen Horizontal-Reihe oder Vertikal-Reihe.

Man kann hiernach die Elemente einer Horizontal-Reihe oder Vertikal-Reihe vermehren um die correspondirenden Elemente mehrerer anderer Horizontal-Reihen oder Vertikal-Reihen, ohne dadurch die Determinante zu ändern.

Die erste Gleichung 38) beweiset, dass die Determinante A übergeht in das Produkt $a_k^\lambda A_k^\lambda$, wenn man die Elemente a_0^λ, ... a_{k-1}^λ, a_{k+1}^λ, ... a_n^λ sämmtlich gleich 0 setzt. Unter dieser Annahme zerfällt, da man das Element a_k^λ selbst als eine Determinante erster Ordnung betrachten kann, die

Determinante Δ in das Produkt zweier Determinanten von niederer Ordnung. Es ist dieses nur ein specieller Fall eines allgemeinen Determinanten-Satzes, den wir uns erst deutlich machen wollen, bevor wir ihn definitiv aussprechen.

Wir nehmen zu diesem Zwecke die Determinante Δ in der Darstellung 28) und theilen dieselbe durch einen Horizontal-Strich zwischen der m^{ten} und $(m+1)^{ten}$ Horizontal-Reihe der Elemente und durch einen Vertikal-Strich zwischen der m^{ten} und $(m+1)^{ten}$ Vertikal-Reihe der Elemente, wie folgt:

$$\left|\begin{array}{llll|lll}
a_0^0 & ,a_1^0, & \ldots & a_{m-1}^0 & a_m^0, & \ldots & a_n^0 \\
a_0^1 & ,a_1^1, & \ldots & a_{m-1}^1 & a_m^1, & \ldots & a_n^1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_0^{m-1} & ,a_1^{m-1}, & \ldots & a_{m-1}^{m-1} & a_m^{m-1}, & \ldots & a_n^{m-1} \\
\hline
a_0^m & ,a_1^m, & \ldots & a_{m-1}^m & a_m^m, & \ldots & a_n^m \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_0^n & ,a_1^n, & \ldots & a_{m-1}^n & a_m^n, & \ldots & a_n^n
\end{array}\right|$$

Die Determinante zerfällt dadurch in zwei Quadrate, welche durch die Diagonale der Elemente halbirt werden und in zwei Rechtecke, von welchen jedes auf einer anderen Seite der Diagonale liegt. Nimmt man nun an, dass sämmtliche Elemente, welche das eine Rechteck enthält, zum Beispiel das oberhalb der Diagonale gelegene, gleich 0 seien, so kann man auf Grund der Analogie behaupten, dass die Determinante Δ zerfalle in das Produkt der beiden Determinanten, welche sich durch die Quadrate ausdrücken lassen, wie folgt:

$$\Delta = \Sigma \pm a_0^0 \ldots a_{m-1}^{m-1} \cdot \Sigma \pm a_m^m \ldots a_n^n.$$

Die Richtigkeit dieser Behauptung werden wir jedoch nachzuweisen haben unter der angegebenen Voraussetzung,

dass alle Elemente der Determinante verschwinden, welche in dem Rechtecke aufgeführt sind:

$$\begin{matrix} a^0_m, & \ldots & a^0_n \\ a^1_m, & \ldots & a^1_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{m-1}_m, & \ldots & a^{m-1}_n \end{matrix}$$

Sämmtliche Glieder der Determinante A entstehen aus ihrem positiven Anfangs-Gliede:

$$a^0_0 a^1_1 \ldots a^{m-1}_{m-1} a^m_m \ldots a^n_n$$

durch Permutation der unteren Indices:

$$0\ 1 \ldots (m-1) \mid m \ldots n,$$

welche wir zum Zwecke des Folgenden in zwei Gruppen von m und $(n - m + 1)$ Indices getheilt haben. Einer jeden Permutation dieser $(n + 1)$ Indices entspricht ein Glied der Determinante. Von diesen Gliedern verschwindet aber ein jedes Glied, welches einer Permutation der $(n + 1)$ Indices entspricht, in welcher ein oder mehrere Indices der zweiten Gruppe in die erste versetzt sind, weil dann verschwindende Elemente des angegebenen Rechtecks als Factoren auftreten.

Weiset man demnach die verschwindenden Glieder der Determinante zurück, so erhält man sämmtliche, geltende Glieder der Determinante A, wenn man in dem positiven Anfangs-Gliede die m unteren Indices der ersten Gruppe unter sich und die $(n - m + 1)$ unteren Indices der zweiten Gruppe wieder unter sich permutirt.

Permutirt man nun in dem positiven Anfangs-Gliede nur die unteren Indices der ersten Gruppe, so erhält man, mit Berücksichtigung der Vorzeichen, die Summe aller Glieder der Determinante, welche den Factor $a^m_m \ldots a^n_n$ haben:

$$a^m_m \ldots a^n_n.\ \Sigma \pm a^0_0 a^1_1 \ldots a^{m-1}_{m-1}.$$

Permutirt man in dieser Summe von Gliedern der Determinante die unteren Indices der zweiten Gruppe und summirt wieder mit Berücksichtigung der Vorzeichen, so erhält man sämmtliche, geltende Glieder der Determinante A, wie die

angegebene Gleichung bekundet, als das Produkt zweier Determinanten.

Wir drücken den hierdurch bewiesenen Satz kurz so aus:

60) Wenn die Elemente:

$$a^k, a_{m+1}^k, \ldots a_n^k$$

für die Werthe von k gleich $0, 1, \ldots (m-1)$ sämmtlich verschwinden, so geht die Determinante:

$$A = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \ldots a_n^n$$

über in das Produkt zweier Determinanten:

$$A = \Sigma \pm a_0^0 \ldots a_{m-1}^{m-1}. \; \Sigma \pm a_m^m \ldots a_n^n.$$

Wenn $a_1^0 = a_2^0 = \ldots a_n^0 = 0$ ist, so hat man:

61) $\ldots \; \Sigma \pm a_0^0 \ldots a_n^n = a_0^0. \; \Sigma \pm a_1^1 \ldots a_n^n.$

Wenn überdies $a_2^1 = a_3^1 = \ldots a_n^1 = 0$ ist, so hat man:

62) $\ldots \; \Sigma \pm a_0^0 \ldots a_n^n = a_0^0 a_1^1. \; \Sigma \pm a_2^2 \ldots a_n^n.$

Fährt man auf diese Weise fort, Elemente der Determinante verschwinden zu lassen, so erhält man:

63) $\Sigma \pm a_0^0 \ldots a_n^n = a_0^0 a_1^1 \ldots a_{m-1}^{m-1}. \; \Sigma \pm a_m^m \ldots a_n^n$

und schliesslich:

64) $\ldots \; \Sigma \pm a_0^0 \ldots a_n^n = a_0^0 a_1^1 \ldots a_n^n.$

Diese letzte Gleichung gilt unter der Voraussetzung, dass sämmtliche Elemente der Determinante oberhalb der Diagonale verschwinden; die Elemente unterhalb können irgend welche Werthe haben.

Der allgemeine Satz 60) lehrt das Produkt zweier Determinanten ausdrücken durch eine Determinante von der Ordnung, welche gleich ist der Summe der Ordnungen der Factoren, gleichfalls mit Einmischung ganz willkürlicher Elemente. Denn die Determinante A enthält ein Rechteck verschwindender Elemente oberhalb der Diagonale und ein entsprechendes Rechteck von willkürlichen Elementen unterhalb der Diagonale, welche letztere im Produkte nicht anzutreffen sind. Derselbe Satz mit seinen Folgerungen 61)—63) lehrt endlich eine gegebene Determinante verschiedentlich ausdrücken als eine Determinante höherer Ordnung.

Wenn man absieht von den Dimensionen der Elemente einer aus dem Produkte zweier Determinanten zusammengesetzten Determinante, so lässt sich das Produkt zweier Determinanten auch als Determinante derselben Ordnung darstellen, wie zum Beispiel:

$$|a_0^0 b_0^0| = |a_0^0| \cdot |b_0^0|,$$

Versucht man diese selbstverständliche Determinanten-Gleichung auf den Fall von Determinanten zweiter Ordnung auszudehnen, so findet man:

$$\begin{vmatrix} a_0^0 b_0^0 + a_1^0 b_1^0, & a_0^1 b_0^0 + a_1^1 b_1^0 \\ a_0^0 b_0^1 + a_1^0 b_1^1, & a_0^1 b_0^1 + a_1^1 b_1^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0^0, & a_1^0 \\ a_0^1, & a_1^1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0^0, & b_1^0 \\ b_0^1, & b_1^1 \end{vmatrix}$$

Denn wenn man entwickelt, so erhält man:

$$(a_0^0 b_0^0 + a_1^0 b_1^0)(a_0^1 b_0^1 + a_1^1 b_1^1) - (a_0^1 b_0^0 + a_1^1 b_1^0)(a_0^0 b_0^1 + a_1^0 b_1^1)$$
$$= (a_0^0 a_1^1 - a_0^1 a_1^0)(b_0^0 b_1^1 - b_0^1 b_1^0),$$

eine Gleichung, welche sich noch leicht verificiren lässt.

Die Erweiterung dieser Determinanten-Gleichungen führt auf das **Multiplications-Theorem der Determinanten**:

65) Wenn $C = \Sigma \pm c_0^0 c_1^1 \ldots c_n^n$ und

$A = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \ldots a_n^n$, $B = \Sigma \pm b_0^0 b_1^1 \ldots b_n^n$, so ist:

$$C = A \,.\, B$$

unter der Bedingung:

$$c_k^\lambda = a_0^k b_0^\lambda + a_1^k b_1^\lambda + \ldots a_n^k b_n^\lambda.$$

Die Bedingung dieses Satzes lässt sich kürzer so ausdrücken:

$$c_k^\lambda = \Sigma_m a_m^k b_m^\lambda.$$

Demnach ist das erste positive Glied der aus den Elementen c zusammengesetzten Determinante C:

$$c_0^0 c_1^1 \ldots c_n^n = \Sigma_{m_0} a_{m_0}^0 b_{m_0}^0 \,.\, \Sigma_{m_1} a_{m_1}^1 b_{m_1}^1 \ldots \Sigma_{m_n} a_{m_n}^n b_{m_n}^n,$$

wo $m_0, m_1, \ldots m_n$ die Zahlen $0, 1, \ldots n$ bedeuten. Diese Gleichung kann man auch so darstellen:

$$c_0^0 c_1^1 \ldots c_n^n = \Sigma_{m_0 m_1 \ldots m_n} \left(a_{m_0}^0 a_{m_1}^1 \ldots a_{m_n}^n \,.\, b_{m_0}^0 b_{m_1}^1 \ldots b_{m_n}^n\right).$$

Aus diesem ersten Gliede der Determinante entspringen nun alle übrigen Glieder derselben durch Permutation der unteren Indices der Elemente c. Bei diesem Verfahren werden aber unter dem Summenzeichen nur die oberen Indices der Elemente a permutirt, während die Indices der Elemente b ganz ungeändert bleiben. Man hat daher mit Berücksichtigung der Vorzeichen:

$$\Sigma \pm c_0^0 c_1^1 \ldots c_n^n = \Sigma_{m_0 m_1 \ldots m_n} \left[\left(\Sigma \pm a_{m_0}^0 a_{m_1}^1 \ldots a_{m_n}^n \right) . \; b_{m_0}^0 b_{m_1}^1 \ldots b_{m_n}^n \right].$$

Die Determinante $\Sigma \pm a_{m_0}^0 a_{m_1}^1 \ldots a_{m_n}^n$ verschwindet nach 33), so oft zwei von den Indices $m_0, m_1, \ldots m_n$ einander gleich sind und mit ihr die entsprechenden Glieder der Summe des rechten Theiles der letzten Gleichung. Da also in dieser Summe die Glieder fehlen, in welchen zwei oder mehrere Indices $m_0, m_1, \ldots m_n$ einander gleich sind, so bedeuten $m_0, m_1, \ldots m_n$ nur die Zahlen 0, 1, ... n in irgend einer Reihenfolge.

Die Determinante $\Sigma \pm a_{m_0}^0 a_m^1 \ldots a_{m_n}^n$ ist aber unter dieser Voraussetzung nach 31) gleich $\pm \; \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \ldots a_n^n$, je nachdem die Permutation $m_0 \; m_1 \ldots m_n$ aus der Permutation $0 \; 1 \ldots n$ durch eine gerade oder ungerade Zahl von Permutationen zweier Indices hervorgegangen ist. Setzt man demnach für die genannte Determinante ihren zuletzt angegebenen Werth in die letzte Gleichung und wirft das $\pm$ Vorzeichen dieses Werthes auf das Produkt $b_{m_0}^0 b_{m_1}^1 \ldots b_{m_n}^n$, so erhält man:

$$\Sigma \pm c_0^0 c_1^1 \ldots c_n^n = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \ldots a_n^n . \; \Sigma_{m_0 m_1 \ldots m_n} \pm b_{m_0}^0 b_{m_1}^1 \ldots b_{m_n}^n,$$

Da nun $m_0, m_1, \ldots m_n$, wie man gesehen hat, die Zahlen 0, 1, .. n in irgend welcher Reihenfolge bedeuten, und das Produkt $b_{m_0}^0 b_{m_1}^1 \ldots b_{m_n}^n$ in der Gleichung das positive oder negative Vorzeichen hat, je nachdem die Permutation $m_0 m_1 \ldots m_n$ aus der Permutation $0 \; 1 \ldots n$ durch eine gerade oder ungerade Zahl von Permutationen zweier Indices hervorgegangen ist, so ist $\Sigma_{m_0 m_1 \ldots m_n} \pm b_{m_0}^0 b_{m_1}^1 \ldots b_{m_n}^n = \Sigma \pm b_0^0 b_1^1 \ldots b_n^n$ und man hat:

$$\Sigma \pm c_0^0 c_1^1 \ldots c_n^n = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \ldots a_n^n . \; \Sigma \pm b_0^0 b_1^1 \ldots b_n^n.$$



Um eine Anwendung des Multiplications-Theoremes 65) zu machen, bemerken wir, dass nach 64) die Determinante B gleich wird dem Produkte der Elemente in der Diagonale, wenn sämmtliche Elemente auf der einen Seite der Diagonale verschwinden. Multipliciren wir nun diese Determinante B mit der Determinante A, so wird das Produkt C nur durch das Produkt der Elemente in der Diagonale der Determinante B von der Determinante A verschieden sein. Die Determinante C hat aber eine von der Determinante A ganz verschiedene Gestalt angenommen, obwohl beide, abgesehen von einem Factor, einander gleich sind. Aus dem Vergleiche der beiden Determinanten A und C gehen dann die Sätze 58) und 59) hervor, die dort ganz anders bewiesen wurden.

Ein specieller Fall des vorgeführten Satzes 65) ist der, wenn die Elemente der Determinante B den ihnen entsprechenden Elementen der Determinante A gleich werden. Unter dieser Voraussetzung hat man:

$$C = A^2.$$

Nimmt man überdies an, dass in der Determinante A die oberen Indices der Elemente Exponenten bedeuten, so verwandelt sich A in das Produkt P in 15) und man hat:

$$C = P^2.$$

Wenn wir endlich festsetzen, dass $a_0, a_1, \ldots a_n$ die Wurzeln seien einer gegebenen Gleichung des $(n+1)^{ten}$ Grades, so ist zwar P eine alternirende Function dieser Wurzeln, aber P^2 eine symmetrische Function derselben, welche sich als solche rational durch die Coefficienten in der Gleichung ausdrücken lässt, oder, wie bekannt durch die Potenz-Summen der Wurzeln. Werfen wir nun einen Blick auf die Zusammensetzung der Elemente in der Determinante C, so sehen wir, dass dieselben gerade die Potenz-Summen der Wurzeln der Gleichung $(n+1)^{ten}$ Grades sind. Die Determinante C ist demnach der Ausdruck der symmetrischen Function P^2 der Wurzeln, übertragen in Potenz-Summen.

Die Gleichung $P = 0$ ist die Bedingung der Gleichheit zweier Wurzeln der gegebenen Gleichung. Diese Bedingungs-Gleichung ist in dem Vorhergehenden zurückgeführt worden

auf die Gleichung $C = 0$ in Potenz-Summen der Wurzeln. Da man nun die Potenz-Summen der Wurzeln durch die Coefficienten in der Gleichung ausdrücken kann, so kann man auch die Bedingung der Gleichheit zweier Wurzeln einer gegebenen, algebraischen Gleichung, durch eine Gleichung ausdrücken, welche nur die Coefficienten der gegebenen Gleichung enthält.

Es soll damit nicht gesagt sein, dass man auf die angegebene Weise zu verfahren habe, um die Bedingungs-Gleichung für die Gleichheit zweier Wurzeln einer gegebenen Gleichung in der übersichtlichsten Form zu erhalten. Soll diese Bedingung durch eine Relation zwischen den Potenz-Summen der Wurzeln ausgedrückt werden, so kennen wir allerdings kein einfacheres Verfahren; soll dagegen dieselbe Bedingung durch die Coefficienten in der gegebenen Gleichung ausgedrückt werden, so weiss die Algebra durch Determinanten-Bildung anderer Art sich besser zu helfen.*)

Wie zwischen den drei in dem Satze 65) näher bezeichneten Determinanten die einfache Relation besteht $C = AB$, so bestehen auch zwischen ihren Unterdeterminanten Relationen, welche ähnlich sind der Zusammensetzung der Elemente c aus den Elementen a und b. Es ist unsere Absicht diese Relationen zu entwickeln.

Wir gehen zu diesem Zwecke von dem Systeme linearer Gleichungen 1) aus, welches wir in 46) zum zweiten Male in der abgekürzten Form vorgeführt haben.

66) . . . . . . $x^\mu = a_0^\mu x_0 + a_1^\mu x_1 + \ldots a_n^\mu x_n$.

Es sind dieses Substitutionen, durch welche an Stelle der Variabelen $x^0, x^1, \ldots x^n$ neue Variabele $x_0, x_1, \ldots x_n$ eingeführt

*) Die Algebra schreibt nämlich vor, die gegebene Gleichnng dadurch homogen zu machen, dass man für die Unbekannte x setzt $\frac{x}{y}$ und mit der höchsten Potenz von y multiplicirt. Dadurch nimmt die Gleichung, wenn man mit $f(x, y)$ eine ganze homogene Function von x und y bezeichnet, die Form an $f(x, y) = 0$. Für die gleiche Wurzel hat man nun $f'(x) = 0$, $f'(y) = 0$. Aus diesen beiden Gleichungen mit der Unbekannten $\frac{x}{y}$ hat man nun die Unbekannte zu eliminiren, was nach der vorgetragenen Sylvester'schen Methode auf die einfachste Weise bewerkstelliget wird.

werden sollen. An Stelle der neuen Variabelen $x_0, x_1, \ldots x^n$ können wir wieder andere Variabele $y^0, y^1, \ldots y^n$ einführen durch die Substitutionen:

67) .... $x_\lambda = b_\lambda^0 y^0 + b_\lambda^1 y^1 + \ldots b_\lambda^n y^n.$

Macht man nun in 66) die Substitutionen 67), so erhält man die Substitutionen:

68) .... $x^\mu = c_\mu^0 y^0 + c_\mu^1 y^1 + \ldots c_\mu^n y^n,$

durch welche die ursprünglichen Variabelen $x^0, x^1, \ldots x^n$ mit den zuletzt aufgeführten Variabelen $y^0, y^1, \ldots y^n$ in direkte Verbindung treten.

Die Coefficienten c in diesen Substitutionen sind aber nicht mehr willkürlich, wie die Coefficienten a und b in den Substitutionen 66) und 67), sie hängen vielmehr ab von den ersteren durch die Relationen:

69) .... $c_k^\lambda = a_0^k b_0^\lambda + a_1^k b_1^\lambda + \ldots a_n^k b_n^\lambda.$

Durch Auflösung der Gleichungen 68) erhält man nun:

70) .... $y^\lambda = \frac{1}{C}\left\{C_0^\lambda x^0 + C_1^\lambda x^1 + \ldots C_n^\lambda x^n\right\},$

das sind Ausdrücke der zuletzt eingeführten Variabelen $y^0, y^1, \ldots y^n$ durch die ursprünglichen $x^0, x^1, \ldots x^n$.

Dieselben Ausdrücke erhält man aber auch auf folgendem Wege. Man löse die Gleichungen 66) und 67) auf wie folgt:

71) .... $x_k = \frac{1}{A}\left\{A_k^0 x^0 + A_k^1 x^1 + \ldots A_k^n x^n\right\},$

72) .... $y^\lambda = \frac{1}{B}\left\{B_0^\lambda x_0 + B_1^\lambda x_1 + \ldots B_n^\lambda x_n\right\},$

und setze die Werthe der Variabelen $x_0, x_1, \ldots x_n$ aus 71) in 72) ein, wodurch man erhält:

$$\begin{aligned} y^\lambda &= \frac{1}{AB}\left\{A_0^0 B_0^\lambda + A_1^0 B_1^\lambda + \ldots A_n^0 B_n^\lambda\right\} x^0 \\ 73) \ldots \quad &+ \frac{1}{AB}\left\{A_0^1 B_0^\lambda + A_1^1 B_1^\lambda + \ldots A_n^1 B_n^\lambda\right\} x^1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{1}{AB}\left\{A_0^n B_0^\lambda + A_1^n B_1^\lambda + \ldots A_n^n B_n^\lambda\right\} x^n. \end{aligned}$$

Da nun dieser Ausdruck von y^λ übereinstimmen muss mit dem Ausdrucke 70) unabhängig von den Werthen der

ursprünglichen Variabelen $x^0, x^1, \ldots x^n$, so muss der Coefficient von x^k in 70) gleich sein dem entsprechenden Coefficienten derselben Variabele in 73) nämlich:

$$\frac{C_k^\lambda}{C} = \frac{1}{AB} \left\{ A_0^k B_0^\lambda + A_1^k B_1^\lambda + \ldots A_n^k B_n^\lambda \right\}.$$

oder:

$$74) \ldots \quad \frac{AB}{C} = \frac{1}{C_k^\lambda} \left\{ A_0^k B_0^\lambda + A_1^k B_1^\lambda + \ldots A_n^k B_n^\lambda \right\}.$$

Was nun den Zähler des Bruches auf der rechten Seite der Gleichung anbetrifft, so hat derselbe kein Element a mit dem obern Index k aufzuweisen, weil nach 37) die Unterdeterminanten $A_0^k, A_1^k, \ldots A_n^k$ kein Element der Art haben. Ebenso enthält der Nenner C_k^λ des Bruches kein Element c mit dem unteren Index k. Setzt man aber in dem Nenner C_k^λ für sämmmtliche Elemente c ihre Werthe $c_k^\lambda = a_0^k b_0^\lambda + a_1^k b_1^\lambda + \ldots a_n^k b_n^\lambda$, so wird, weil der untere Index k dem Elemente c fehlt, auch der obere Index k der Elemente a nicht aufgefunden werden können. Der rechte Theil der Gleichung 74) ist also unabhängig von den Elementen $a_0^k, a_1^k, \ldots a_n^k$ und darum auch der linke Theil der Gleichung.

Da nun k eine beliebige von den Zahlen $0, 1, \ldots n$ bedeutet, so sieht man ein, dass der Werth des Bruches auf der linken Seite der Gleichung 74) unabhängig ist von sämmtlichen Elementen a. Ebenso lässt sich die Unabhängigkeit des Werthes des genannten Bruches von den Elementen b nachweisen. Der Bruch ist also ein Zahlenbruch.

Der Zahlenwerth des Bruches auf der linken Seite der Gleichung 74) wird sich bestimmen lassen aus beliebigen speciellen Fällen. Lässt man zu diesem Zwecke sowohl in der Determinante A als in der Determinante B sämmtliche Elemente verschwinden mit Ausnahme derjenigen Elemente, welche in der Diagonale stehen, die gleich der Einheit angenommen werden mögen, so hat man auf Grund von 64) $A=1$ und $B=1$.

Bildet man nun aus den speciellen Elementen der Determinanten A und B nach der bekannten Regel die Elemente

der Determinante C, so verschwinden auch in der Determinante C sämmtliche Elemente mit Ausnahme derjenigen, welche in der Diagonale stehen und der Einheit gleich werden. Man hat demnach auch $C=1$ und der Zahlenwerth des Bruches auf der linken Seite der Gleichung 74) wird gleich der Einheit.

Es ist dieses ein zweiter Beweis des Multiplications-Theoremes 65), denn es wird aus dem Vorhergehenden ersichtlich, dass allgemein ist:

$$C=AB$$

von welcher Beschaffenheit die Elemente der Determinanten A und B auch seien.

Schliesslich geht aus der Gleichung 74) der Satz hervor:

75) Wenn $C=\Sigma\pm c_0^0 c_1^1 \dots c_n^n$ und

$$A=\Sigma\pm a_0^0 a_1^1 \dots a_n^n,\quad C=\Sigma\pm b_0^0 b_1^1 \dots b_n^n,$$

so ist unter der Bedingung:

$$c_k^\lambda = a_0^k b_0^\lambda + a_1^k b_1^\lambda + \dots a_n^k b_n^\lambda$$

nicht allein $C=AB$, sondern man hat auch zwischen den Unterdeterminanten die Relation:

$$C_k^\lambda = A_0^k B_0^\lambda + A_1^k B_1^\lambda + \dots A_n^k B_n^\lambda.$$

Um ein Beispiel vorzuführen, entnehmen wir aus 35) die Werthe der Unterdeterminanten:

$$A_0^0=(a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2),\quad A_1^0=-(a_0^1 a_2^2 - a_2^1 a_0^2),\quad A_2^0=(a_0^1 a_1^2 - a_1^1 a_0^2).$$

Wenn wir nun $k=\lambda=0$ setzen, so haben wir auf Grund des Satzes 75) und der angegebenen Werthe der Unterdeterminanten die identische Gleichung:

$$\begin{aligned}
&(a_0^1 b_0^1 + a_1^1 b_1^1 + a_2^1 b_2^1)\,(a_0^2 b_0^2 + a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2)\\
&\quad -(a_0^2 b_0^1 + a_1^2 b_1^1 + a_2^2 b_2^1)\,(a_0^1 b_0^2 + a_1^1 b_1^2 + a_2^1 b_2^2)\\
76)\quad &= (a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2)\,(b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2) + (a_0^1 a_2^2 - a_2^1 a_0^2)\,(b_0^1 b_2^2 - b_2^1 b_0^2)\\
&\quad + (a_0^1 a_1^2 - a_1^1 a_0^2)\,(b_0^1 b_1^2 - b_1^1 b_0^2).
\end{aligned}$$

Wenn man ferner annimmt, dass die Elemente b den ihnen entsprechenden Elementen a gleich werden, so geht die letzte Gleichung über in:

$$\begin{aligned}
&(a_0^1 a_0^1 + a_1^1 a_1^1 + a_2^1 a_2^1)\,(a_0^2 a_0^2 + a_1^2 a_1^2 + a_2^2 a_2^2)\\
77)\dots\quad &\quad -(a_0^1 a_0^2 + a_1^1 a_1^2 + a_2^1 a_2^2)^2\\
&= (a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2)^2 + (a_0^1 a_2^2 - a_2^1 a_0^2)^2 + (a_0^1 a_1^2 - a_1^1 a_0^2)^2.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung drückt in der analytischen Geometrie den Satz aus, dass das Quadrat des Flächen-Inhaltes eines Dreieckes gleich ist der Summe der Quadrate der Flächen-Inhalte der senkrechten Projectionen des Dreieckes auf drei auf einander senkrecht stehende Ebenen. Es ist dieses nur eine von den vielen Anwendungen, die man von den angegebenen identischen Gleichungen macht.



